



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI BRESCIA

DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E MANAGEMENT

*Corso di Laurea Magistrale  
in MANAGEMENT*

## **Tesi di Laurea**

# **ANALISI DELLE PERCEZIONI ESPRESSE SU SCALE A DIFFERENZIALE SEMANTICO: STIMA DI FEELING E INCERTEZZA CON IL MODELLO CUM**

Relatore: Chiar.ma Prof.ssa Paola Zuccolotto

Correlatore: Chiar.ma Prof.ssa Marica Manisera

Laureando:  
Paolo Vezzoli

Matricola n. 718903

---

*Anno Accademico 2021/2022*

# INDICE

INDICE .....	2
Indice delle Figure .....	5
Indice delle Tabelle .....	7
INTRODUZIONE .....	8
CAPITOLO 1 – RICERCHE DI MERCATO E SCALE A DIFFERENZIALE SEMANTICO.....	10
1.1. Il marketing <i>data-driven</i> e le ricerche di mercato .....	10
1.1.1. Principali fabbisogni informativi del marketing.....	11
1.1.2. Scale di misurazione nelle ricerche di mercato .....	12
1.2. Le scale a differenziale semantico .....	14
1.2.1. L'introduzione delle scale a differenziale semantico in psicologia.....	15
1.2.2. Le applicazioni nel marketing.....	16
1.3. Analisi sensoriale e marketing sensoriale.....	18
1.3.1. Le origini storiche dell'analisi sensoriale: il settore alimentare .....	19
1.3.2. Le applicazioni negli altri settori: il marketing sensoriale .....	20
1.4. La sinestesia: verso il marketing multisensoriale .....	22
1.5. Tecniche statistiche per l'analisi delle scale a differenziale semantico.....	23
1.5.1. La proposta originaria di Osgood: la <i>Factor Analysis</i> .....	24
1.5.2. Le ipotesi formulate da Osgood.....	26
1.5.3. Proprietà delle scale a differenziale semantico e tecniche di analisi .....	28
CAPITOLO 2 – MODELLI CUB PER L'ANALISI DEI DATI ORDINALI .....	32
2.1. La classe dei modelli CUB .....	33
2.1.1. Gli obiettivi dei modelli CUB.....	33
2.1.2. L'analisi delle preferenze .....	34
2.2. Il processo decisionale ipotizzato .....	36
2.2.1. La componente di <i>feeling</i> .....	38
2.2.2. La componente di <i>uncertainty</i> .....	38
2.3. La variabile casuale CUB .....	39
2.3.1. La v.c. Binomiale traslata.....	40
2.3.2. La v.c. Uniforme discreta.....	44
2.3.3. Funzione di massa di probabilità della v.c. CUB .....	44
2.4. Il significato dei parametri.....	46
2.4.1. Il parametro $\xi$ e il <i>feeling</i> .....	46
2.4.2. Il parametro $\pi$ e l'incertezza .....	49

2.5. La stima dei parametri .....	51
2.5.1. Metodo della massima verosimiglianza.....	52
2.5.2. Algoritmo EM per la stima di massima verosimiglianza .....	55
2.5.3. Funzionamento dell'algoritmo EM per il modello CUB .....	58
2.6. Bontà della rappresentazione.....	62
2.7. Utilizzo dei modelli CUB .....	64
2.7.1. Rappresentazione grafica delle misure di <i>feeling</i> e incertezza .....	67
2.7.2. <i>Covariate</i> e classe dei modelli CUB .....	68
CAPITOLO 3 – MODELLO CUM PER L'ANALISI DEI DATI RACCOLTI SU SCALE A DIFFERENZIALE SEMANTICO .....	70
3.1. Formulazione generale del processo di risposta a una scala ordinale .....	71
3.1.1. Il percorso di <i>feeling</i> .....	73
3.1.2. Il modello CUB come caso particolare del modello generale .....	76
3.1.3. Il processo decisionale del modello CUM.....	79
3.2. Percorso di <i>feeling</i> del modello CUM .....	81
3.2.1. I giudizi elementari: la variabile casuale Multinoulli.....	82
3.2.2. I giudizi accumulati: la distribuzione Multinomiale .....	84
3.2.3. I giudizi provvisori: la trasformazione della v.c. Multinomiale.....	85
3.2.4. Il giudizio finale derivante dal percorso di <i>feeling</i> .....	86
3.3. Funzione di massa di probabilità della variabile casuale CUM .....	88
3.3.1. Funzione di massa di probabilità della variabile $M_k$ .....	88
3.3.2. Funzione di massa di probabilità della v.c. $W_k$ .....	90
3.3.3. Combinazione della componente di <i>feeling</i> e di incertezza.....	94
3.4. I parametri del modello CUM .....	95
3.4.1. Il parametro di incertezza $1 - \pi$ .....	95
3.4.2. I parametri di <i>feeling</i> $\xi_D$ e $\xi_U$ .....	97
3.5. La stima dei parametri .....	101
3.5.1. Funzione di massima verosimiglianza .....	101
3.5.2. Funzionamento dell'algoritmo EM .....	103
3.6. Bontà della rappresentazione.....	106
3.7. Utilizzo dei modelli CUM .....	107
3.7.1. Misure di incertezza e di <i>feeling</i> .....	107
3.7.2. Rappresentazione grafica delle misure di <i>feeling</i> e di incertezza .....	109

CAPITOLO 4 – APPLICAZIONE DEL MODELLO CUM: IL CASO DELL’INDAGINE SENSORIALE SVOLTA PRESSO LA PINACOTECA TOSIO-MARTINENGO.....	114
4.1. Progetti “Musei Brescia” e “Data Science for Brescia” .....	115
4.1.1. L’indagine sensoriale condotta presso la Pinacoteca Tosio-Martinengo.....	116
4.1.2. La domanda relativa alle percezioni sensoriali suscitate dalla visita della sala.....	118
4.2. Impiego del modello CUM per l’analisi delle percezioni dei visitatori .....	122
4.2.1. Livello di adattamento del modello CUM e confronto con il modello CUB .....	122
4.2.2. Confronto tra le frequenze osservate e le probabilità stimate dai due modelli.....	125
4.3. Risultati dell’applicazione del modello CUM alle 1024 risposte osservate .....	130
4.3.1. Rappresentazione grafica delle stime dei parametri relative alle 12 scale.....	134
4.3.2. Rappresentazione dei risultati ottenuti per le singole scale a differenziale semantico	139
4.4. Applicazione del modello CUM alle risposte raccolte nella sala azzurra .....	146
4.4.1. Adattamento del modello CUM ai dati raccolti nella sala azzurra.....	149
4.4.2. Valori stimati dei parametri del modello CUM per la sala azzurra.....	153
4.4.3. Rappresentazione delle misure di <i>feeling</i> e di incertezza per la sala azzurra .....	154
4.5. Applicazione del modello CUM alle risposte raccolte nella sala rossa.....	157
4.5.1. Adattamento del modello CUM ai dati raccolti nella sala rossa .....	159
4.5.2. Valori stimati dei parametri del modello CUM per la sala rossa .....	162
4.5.3. Rappresentazione delle misure di <i>feeling</i> e di incertezza per la sala rossa .....	163
4.6. Applicazione del modello CUM alle risposte raccolte nella sala verde .....	165
4.6.1. Adattamento del modello CUM ai dati raccolti nella sala verde.....	167
4.6.2. Valori stimati dei parametri del modello CUM per la sala verde.....	171
4.6.3. Rappresentazione delle misure di <i>feeling</i> e di incertezza per la sala verde .....	173
4.7. Confronto delle percezioni sensoriali relative alle tre sale (azzurra, rossa e verde) ...	175
4.7.1 Risultati dell’analisi delle percezioni tattili.....	178
4.7.2. Risultati dell’analisi delle percezioni olfattive.....	179
4.7.3. Risultati dell’analisi delle percezioni gustative .....	180
4.7.4. Risultati dell’analisi delle percezioni visive .....	181
4.7.5. L’effetto dei colori sulle percezioni sensoriali dei visitatori.....	182
CONSIDERAZIONI FINALI .....	184
APPENDICE 1 – PERCEZIONI SENSORIALI NELLE TRE SALE E PERCEZIONE MEDIA .....	190
APPENDICE 2 – CODICE R UTILIZZATO PER APPLICARE IL MODELLO CUM.....	194
BIBLIOGRAFIA .....	200
SITOGRAFIA .....	209

## Indice delle Figure

<i>Figura 1.1.</i> – La percentuale di varianza spiegata dai diversi fattori .....	25
<i>Figura 1.2.</i> – Le tre dimensioni dello spazio in cui rappresentare il significato dei vari concetti .....	26
<i>Figura 1.3.</i> – Avverbi e valori numerici associati ai diversi punti di una scala a differenziale semantico .....	27
<i>Figura 2.1.</i> – Supporto e funzione di massa di probabilità di una variabile casuale Binomiale e di una variabile casuale Binomiale traslata in un caso con $m = 7$ .....	43
<i>Figura 2.2.</i> – Andamento della v.c. CUB al variare del parametro $\xi$ .....	48
<i>Figura 2.3.</i> – Andamento della v.c. CUB al variare del parametro $\pi$ .....	50
<i>Figura 2.4.</i> – Esempio per il calcolo dell'indice di dissimilarità .....	64
<i>Figura 2.5.</i> – Effetto di due valori diversi della quota di incertezza .....	65
<i>Figura 2.6.</i> – Esempio di rappresentazione grafica delle misure di <i>feeling</i> e incertezza .....	68
<i>Figura 3.1.</i> – Andamento della v.c. CUM al variare del parametro $\pi$ .....	96
<i>Figura 3.2.</i> – Andamento della v.c. CUM al variare dei parametri $\xi_D$ e $\xi_U$ .....	98
<i>Figura 3.3.</i> – Struttura del <i>ternary plot</i> e rappresentazione del <i>feeling</i> e dell'incertezza .....	111
<i>Figura 3.4.</i> – Confronto delle misure di <i>feeling</i> e di incertezza relative a più scale diverse .....	111
<i>Figura 4.1.</i> – La batteria di scale a differenziale semantico su cui applicare il modello CUM ....	118
<i>Figura 4.2.</i> – Distribuzione di frequenze relative e assolute delle risposte ottenute alla Domanda 4 del questionario .....	120
<i>Figura 4.3.</i> – Distribuzione delle frequenze osservate e delle probabilità stimate dai modelli CUM e CUB .....	126
<i>Figura 4.4.</i> – Rappresentazione grafica (su un unico <i>ternary plot</i> ) delle stime dei parametri del modello CUM per le 12 scale a differenziale semantico .....	135
<i>Figura 4.5.</i> – Rappresentazione grafica delle stime dei parametri di incertezza e di <i>feeling</i> del modello CUB per le 12 scale a differenziale semantico .....	136
<i>Figura 4.6.</i> – Rappresentazione grafica dei singoli <i>ternary plot</i> relativi a ognuna delle 12 scale a differenziale semantico analizzate applicando il modello CUM .....	140
<i>Figura 4.7.</i> – Numero di risposte raccolte nelle tre sale della Pinacoteca Tosio-Martinengo .....	146

<i>Figura 4.8.</i> – Distribuzione di frequenze relative e assolute delle risposte raccolte nella sala azzurra della Pinacoteca .....	147
<i>Figura 4.9.</i> – Distribuzione delle frequenze osservate e delle probabilità stimate dal modello CUM applicato alle risposte raccolte nella sala azzurra .....	152
<i>Figura 4.10.</i> – Rappresentazione grafica (su un unico <i>ternary plot</i> ) dei valori stimati dal modello CUM per le 12 scale a differenziale semantico relative alla sala azzurra .....	155
<i>Figura 4.11.</i> – Distribuzione di frequenze relative e assolute delle risposte raccolte nella sala rossa della Pinacoteca .....	157
<i>Figura 4.12.</i> – Distribuzione delle frequenze osservate e delle probabilità stimate dal modello CUM applicato alle risposte raccolte nella sala rossa .....	161
<i>Figura 4.13.</i> – Rappresentazione grafica (su un unico <i>ternary plot</i> ) dei valori stimati dal modello CUM per le 12 scale a differenziale semantico relative alla sala rossa .....	164
<i>Figura 4.14.</i> – Distribuzione di frequenze relative e assolute delle risposte raccolte nella sala verde della Pinacoteca .....	166
<i>Figura 4.15.</i> – Distribuzione delle frequenze osservate e delle probabilità stimate dal modello CUM applicato alle risposte raccolte nella sala verde .....	169
<i>Figura 4.16.</i> – Rappresentazione grafica (su un unico <i>ternary plot</i> ) dei valori stimati dal modello CUM per le 12 scale a differenziale semantico relative alla sala verde .....	173
<i>Figura 4.17.</i> – Rappresentazione grafica dei risultati ottenuti nella sala azzurra, rossa e verde (e nel caso delle 1024 risposte) applicando il modello CUM .....	176

## Indice delle Tabelle

<i>Tabella 3.1.</i> – Schema concettuale del processo psicologico di risposta a una scala ordinale .....	75
<i>Tabella 3.2.</i> – Ipotesi formulate riguardo agli elementi del percorso di <i>feeling</i> per ricavare il modello CUB dallo schema generale del processo decisionale .....	79
<i>Tabella 3.3.</i> – Realizzazioni della variabile casuale Multinoulli associata a un giudizio elementare .....	83
<i>Tabella 3.4.</i> – Ipotesi formulate riguardo agli elementi del percorso di <i>feeling</i> per ricavare il modello CUM dallo schema generale del processo decisionale .....	87
<i>Tabella 3.5.</i> – Funzione di massa di probabilità di $W_k$ nel caso di una scala a 7 categorie .....	91
<i>Tabella 3.6.</i> – Funzione di massa di probabilità di $W_k$ nel caso di una scala a 5 categorie .....	93
<i>Tabella 4.1.</i> – Livello di adattamento e <i>information criteria</i> relativi ai modelli CUM e CUB ....	122
<i>Tabella 4.2.</i> – Valori stimati dei parametri del modello CUM e del modello CUB .....	132
<i>Tabella 4.3.</i> – Livello di adattamento dei modelli CUM e CUB nella sala azzurra .....	149
<i>Tabella 4.4.</i> – Valori stimati dei parametri del modello CUM relativi alla sala azzurra .....	153
<i>Tabella 4.5.</i> – Livello di adattamento dei modelli CUM e CUB nella sala rossa .....	159
<i>Tabella 4.6.</i> – Valori stimati dei parametri del modello CUM relativi alla sala rossa .....	162
<i>Tabella 4.7.</i> – Livello di adattamento dei modelli CUM e CUB nella sala verde .....	168
<i>Tabella 4.8.</i> – Valori stimati dei parametri del modello CUM relativi alla sala verde .....	171

## INTRODUZIONE

Al giorno d'oggi le imprese, per avere successo sul mercato, devono disporre di sempre più informazioni, per poter definire la strategia aziendale più adatta da perseguire, e per riuscire a programmare e a svolgere le attività necessarie al raggiungimento degli obiettivi strategici prefissati. Alcune di queste informazioni, oggi sempre più rilevanti, sono quelle che supportano le imprese nello sviluppo delle strategie di marketing. Dato che le esigenze dei clienti tendono a essere via via più articolate e in costante mutamento, le imprese devono continuamente ottenere informazioni sui loro clienti, raccogliendo vari tipi di dati ed elaborandoli attraverso opportuni metodi statistici. In molti casi, questi dati vengono raccolti conducendo delle ricerche di mercato che, in genere, si avvalgono di scale di misurazione per rilevarli. Una tipologia di scale che può essere impiegata per diverse analisi di marketing è rappresentata dalle scale a differenziale semantico, nelle quali viene chiesto di scegliere una certa alternativa tra quelle a disposizione, collocate tra due termini di significato opposto, posizionati agli estremi della scala.

L'obiettivo principale di questa Tesi è quello di presentare un metodo statistico per l'analisi dei dati raccolti attraverso scale a differenziale semantico, che consenta di sintetizzare le risposte osservate e di ricavare informazioni sul fenomeno che si desidera indagare.

In letteratura è stato introdotto un modello, pensato appositamente per questo genere di scale, che è denominato CUM, in quanto deriva dalla Combinazione di una variabile casuale Uniforme con una variabile casuale Multinomiale.

Nei quattro capitoli in cui si articola, il presente elaborato – una volta individuate le principali caratteristiche e proprietà delle scale a differenziale semantico – ha lo scopo di illustrare il funzionamento del modello CUM, da un punto di vista sia teorico, sia applicativo.

Il Capitolo 1 tratta delle ricerche di mercato – necessarie per soddisfare i fabbisogni informativi di marketing – e del ruolo delle scale a differenziale semantico, un utile strumento per condurre diversi tipi di analisi, per esempio in merito all'immagine di marca, all'efficacia delle politiche di comunicazione, e a ricerche di marketing sensoriale. Una particolare attenzione verrà posta alle caratteristiche distintive delle scale a differenziale semantico, che rientrano tra le scale di misurazione di tipo ordinale. Le risposte raccolte su queste scale rappresentano dati di natura qualitativa e, perciò, richiedono di essere analizzate attraverso metodi statistici adatti a questa

tipologia di dati. Un metodo che può essere impiegato per analizzare le risposte a una scala a differenziale semantico è il modello CUM, che è stato sviluppato a partire da una classe di modelli di analisi delle scale ordinali che prende il nome di CUB (trattandosi di una Combinazione di due variabili casuali, una Uniforme e una Binomiale).

La classe dei modelli CUB è presentata nel Capitolo 2, nel quale viene evidenziata una possibile formulazione matematica del processo decisionale che viene svolto dalla mente delle persone a cui viene chiesto di rispondere a una scala ordinale. Nel Capitolo, in particolare, viene illustrato il funzionamento del modello “CUB senza *covariate*”, soffermandosi sul significato dei parametri da cui esso dipende e sul metodo numerico attraverso cui è possibile ottenere le stime di tali parametri, in base alle quali si possono ricavare informazioni sul processo di risposta alla scala ordinale analizzata.

Nel Capitolo 3 viene presentato il modello CUM, che condivide con la classe dei modelli CUB alcune ipotesi fondamentali in merito al processo di risposta a una scala ordinale. Viene presentato uno schema alternativo di concettualizzazione di tale processo decisionale che, oltre a ricomprendere i modelli CUB, consente di ricavare il modello CUM, formulando alcune ipotesi specifiche, derivanti dalle caratteristiche distintive delle scale a differenziale semantico. Viene poi illustrato il funzionamento del CUM e viene presentato l’algoritmo che permette di ottenere le stime dei parametri del modello, in funzione delle quali si possono sintetizzare le risposte osservate, per ottenere informazioni in merito al fenomeno che si desidera indagare attraverso delle scale a differenziale semantico.

Nel Capitolo 4, il modello CUM viene applicato ai dati raccolti nell’ambito di un’indagine sensoriale che è stata condotta, avvalendosi di una serie di scale a differenziale semantico, in una realtà museale bresciana. Questo consentirà di valutare la capacità del modello di adattarsi in modo soddisfacente alle risposte raccolte nell’ambito di uno studio reale, e permetterà di illustrare come i risultati ottenuti per diverse scale a differenziale semantico possano essere interpretati e confrontanti tra loro, anche avvalendosi di opportune rappresentazioni grafiche.

## CAPITOLO 1

### **RICERCHE DI MERCATO E SCALE A DIFFERENZIALE SEMANTICO**

La qualità delle informazioni a disposizione delle imprese è un fattore sempre più determinante per il loro successo, perché solo grazie a una solida base informativa possono essere prese le decisioni strategiche più opportune e possono essere coordinate e svolte al meglio le attività operative necessarie all'attuazione della strategia.

Tra queste informazioni, indubbiamente quelle che facilitano le attività strategiche e operative di marketing giocano un ruolo chiave, perché permettono all'impresa di conoscere meglio i suoi concorrenti e, soprattutto, i suoi clienti – attuali e potenziali. A tale scopo è possibile utilizzare dati secondari – già raccolti in precedenza, spesso per obiettivi non del tutto simili a quelli dell'indagine in corso (McDaniel e Gates, 2015, p. 73) – ma, frequentemente, si fa ricorso ai dati primari, tipicamente ottenuti conducendo delle ricerche di mercato. Queste, spesso, mirano a raccogliere giudizi, percezioni e altre informazioni relative ai clienti dell'azienda, avvalendosi di varie scale di misurazione. Tra queste, una tipologia molto utile e versatile è rappresentata dalle scale a differenziale semantico, le cui applicazioni sono svariate e spaziano dalle analisi di marketing più tradizionali agli studi di analisi sensoriale.

Pertanto, è importante comprendere le caratteristiche di questa tipologia di scale di misurazione e, sulla base di queste, individuare quali tecniche statistiche possano essere opportunamente impiegate per la loro analisi.

#### **1.1. Il marketing *data-driven* e le ricerche di mercato**

Per poter definire un'adeguata strategia di marketing e per poter adottare efficaci azioni per attuarla, è necessario che a monte venga svolta un'attenta attività di analisi del mercato in cui l'impresa opera. Per questo motivo, il marketing può essere definito come “*market-driven management*” (Lambin, 2016), che significa “gestione aziendale guidata dal mercato”, cioè basata su un'approfondita conoscenza dei concorrenti e, soprattutto, dei clienti che costituiscono il mercato di riferimento dell'impresa. Si tratta dell'approccio che viene spesso definito “orientamento al mercato” (Lambin, 2016, p. 23) e che costituisce una determinante fondamentale della performance economico-finanziaria delle imprese e, quindi, del loro successo (Abbu e Gopalakrishna, 2021). Conoscere meglio il mercato, ad esempio

comprendendo meglio i bisogni dei propri clienti, permette alle imprese di sviluppare prodotti più adatti alle loro esigenze, rendendo così i clienti più soddisfatti (Shah e Murthi, 2021). Sarà quindi più probabile che i clienti acquistino nuovamente da quell'impresa, finendo poi per fidelizzarsi, instaurando cioè una relazione di lungo termine con l'azienda. Grazie a questo, l'impresa conseguirà dei risultati economici positivi, che le consentiranno anche di aumentare gli investimenti per condurre nuove analisi di mercato, le quali contribuiranno a migliorare ulteriormente la conoscenza dei clienti, dando così origine a un circolo virtuoso (Busacca e Bertoli, 2017, p. 94).

Pertanto, diventa fondamentale che la funzione marketing, così come l'impresa nel suo complesso, siano sempre più *data-driven*, cioè orientate alla raccolta di dati e alla loro elaborazione al fine di ottenere le informazioni necessarie a garantire un adeguato livello di orientamento al mercato.

### **1.1.1. Principali fabbisogni informativi del marketing**

Le analisi di marketing che le imprese si trovano a condurre sono varie (Hague, 2021, p. 8) e spesso richiedono la realizzazione di ricerche di mercato *ad hoc*, andando a chiedere direttamente ai propri clienti di rispondere ad alcune domande, per poterle poi elaborare e ottenere le informazioni di interesse per l'azienda.

L'impresa, anzitutto, si trova a dover raccogliere informazioni per comprendere i bisogni dei clienti che andrà a servire, perché sarà in funzione di questi che dovrà sviluppare i suoi prodotti o progettare i servizi da erogare. Sulla base dei bisogni potrà essere effettuata la segmentazione dei clienti (McDonald e Dunbar, 2012, p. 14), cercando di suddividerli in segmenti che raggruppino clienti simili, facendo anche in modo che gli appartenenti a segmenti diversi abbiano risposte differenziate alle leve di marketing (Lambin, 2016, p. 202).<sup>1</sup>

Tra i diversi segmenti di mercato individuati, l'impresa sceglierà su quali concentrarsi e progetterà i suoi prodotti per soddisfare i bisogni di questi clienti *target*; anche per lo sviluppo dei prodotti, dovrà svolgere solide analisi per progettare gli attributi di prodotto in modo che siano apprezzati dai clienti (Hague, 2021, p. 8). Una volta introdotti i prodotti sul mercato,

---

<sup>1</sup> Le aziende nell'attuare operativamente le strategie di marketing hanno a disposizione diverse "leve" su cui possono agire: il prodotto, il prezzo, la distribuzione e la comunicazione (Lambin, 2016, p. 5), alle quali, nell'ambito delle imprese di servizi, si aggiungono il processo di erogazione del servizio, il luogo in cui questa avviene e il personale di contatto con il cliente durante l'erogazione (Hoffman, Bateson, Iasevoli, 2007, pp. 10-12).

l'impresa dovrà anche valutare l'atteggiamento degli utilizzatori nei loro confronti (Hague, 2021, p. 8; Busacca e Bertoli, p. 152), il che consente anche di stimare il valore che i consumatori attribuiscono a quel bene o servizio, così da conoscere il livello massimo di prezzo al quale il prodotto potrà essere offerto (Lambin, 2016, p. 425). Un prezzo fissato al di sopra di tale livello, infatti, non sarebbe accettato dal mercato e il prodotto rischierebbe di restare invenduto.

Il prezzo applicabile, oltre a dipendere dagli attributi del prodotto e dal valore attribuitogli dai clienti, sarà da definire anche in funzione del posizionamento competitivo, che andrà valutato studiando le percezioni che i clienti hanno nei confronti del prodotto o della marca rispetto alle percezioni relative a prodotti e marche delle imprese concorrenti (Bertoli e Valdani, 2018, p. 291). Sul posizionamento percepito impattano diversi elementi intangibili, quali: l'immagine di marca, i valori associati a un *brand*, e – nel caso di imprese operanti sui mercati internazionali – l'effetto del paese d'origine dell'impresa (Bertoli e Valdani, 2018, p. 333). Anche questi aspetti possono essere studiati conducendo opportune ricerche di mercato.

Sulle percezioni relative a un prodotto o a una marca impattano in modo determinante le politiche di comunicazione, la cui efficacia dovrà essere misurata anche attraverso ricerche *ad hoc* svolte presso i clienti. Ad esempio, può essere utile indagare le loro percezioni, su certi attributi di prodotto, prima e dopo una specifica campagna di comunicazione, per valutarne l'impatto e l'efficacia rispetto agli obiettivi prefissati (Busacca e Bertoli, 2017, p. 146).

Infine, l'impresa dovrà misurare il livello di soddisfazione dei suoi clienti (Hague, 2021, p. 8), cercando di individuare le determinanti principali della *customer satisfaction* e gli aspetti più critici dell'offerta, sui quali intervenire per rendere i clienti più soddisfatti, in modo da fidelizzarli alla marca, per riuscire a instaurare con loro una relazione di lungo termine che garantisca buoni ritorni economici all'impresa (Busacca e Bertoli, 2017, p. 249).

### **1.1.2. Scale di misurazione nelle ricerche di mercato**

Le analisi di marketing possono essere di varie tipologie e possono avere finalità differenti, ma una caratteristica comune a tutte è che raramente si trovano a raccogliere dati puramente quantitativi. Spesso, infatti, ci si trova a indagare percezioni, atteggiamenti, preferenze, valutazioni e giudizi dei clienti (Malhotra, 2020, p. 271), che sono dei caratteri qualitativi, generalmente misurati attraverso scale ordinali.

Queste ultime sono una delle quattro tipologie in cui vengono tradizionalmente classificate le scale di misurazione (Stevens, 1946), distinguendo tra quelle nominali, ordinali, per intervalli o di rapporti. Rispettivamente, le prime due tipologie permettono di rilevare i caratteri qualitativi, mentre le ultime due vengono impiegate per misurare caratteri quantitativi (Cicchitelli, D'Urso, Minozzo, 2017, p. 14). Le scale ordinali godono di un'importante proprietà che le distingue da quelle nominali: esse misurano un carattere le cui modalità possono essere disposte secondo un ordine "naturale" (Cicchitelli, D'Urso, Minozzo, 2017, p. 12), pertanto le alternative di risposta su una scala ordinale sono in genere disposte, alternativamente, in ordine crescente o decrescente.<sup>2</sup>

Una delle scale ordinali più utilizzate nelle ricerche di marketing è quella introdotta, dallo psicologo Rensis Likert (1932), come strumento per misurare l'atteggiamento delle persone rispetto a un certo argomento. L'obiettivo è quello di individuare quali sono le convinzioni maturate da una persona rispetto a un concetto, sulla base dei ragionamenti che lo riguardano e delle emozioni a esso associate (Joshi et al., 2015). Nella loro formulazione originaria (Likert, 1932) le scale di Likert sono state proposte come scale a cinque modalità di risposta, ognuna delle quali accompagnata da alcuni termini, che costituiscono la cosiddetta "etichetta" (*label* o *anchor* in inglese) e che definiscono varie tipologie di atteggiamento che il rispondente può manifestare verso l'argomento in questione. In particolare, Likert (1932) suggerisce di utilizzare le scale in modo che il rispondente sia chiamato a esprimere, su di esse, il suo grado di accordo o disaccordo con una certa affermazione fornita (Malhotra, 2020, p. 292), passando da "fortemente d'accordo" fino a "fortemente in disaccordo", con la possibilità di scegliere una modalità centrale, che rappresenta un atteggiamento neutrale (Likert, 1932).

Per misurare l'atteggiamento del rispondente rispetto a un argomento, sarà necessario che gli venga chiesto di esprimere il suo grado di accordo con una serie di affermazioni, relative a specifici aspetti – detti *item* – collegati all'argomento analizzato (Likert, 1932). Il soggetto si troverà quindi a rispondere alla cosiddetta "batteria di *item* in scala di Likert" (Johns, 2010).

---

<sup>2</sup> Per questa loro caratteristica, le alternative di risposta di una scala ordinale vengono spesso rappresentate – e codificate – con dei numeri, in modo che la prima modalità in ordine crescente corrisponda al numero più basso, ad esempio 1, e il numero più alto sia invece associato all'ultima modalità in ordine crescente. È fondamentale tenere presente che – come verrà presentato in seguito (cfr. Par. 1.5.3.) – nonostante l'eventuale codifica numerica, quelle rappresentate sono le modalità di un carattere qualitativo che, pertanto, non godono delle proprietà dei numeri – i quali sono, invece, rilevati da variabili quantitative misurate su scale per intervalli o di rapporti.

Questa tipologia di scale, introdotte in psicometria, ha poi trovato ampia applicazione nelle ricerche di mercato, oltre che per la misurazione degli atteggiamenti, anche per l'analisi della soddisfazione dei clienti, per la valutazione dell'importanza dei singoli attributi di prodotto, e per lo studio del posizionamento della marca (Russell, 2010).

Indipendentemente dall'ambito di ricerca in cui vengono applicate, le scale di tipo Likert hanno una serie di caratteristiche distintive. Anzitutto, in genere, presentano un numero dispari di alternative di risposta, in modo che la modalità centrale rappresenti neutralità rispetto all'argomento; in questo modo la scala risulta bilanciata e simmetrica (Joshi et al, 2015), cioè presenta un'alternativa neutrale e un numero uguale di alternative positive e negative.<sup>3</sup> Inoltre, le alternative di risposta sono ordinate, spesso dalla più negativa alla più positiva. Ciascuna modalità di risposta presenta un'etichetta – in genere costituita da uno o pochi termini – che ne chiarisce il significato, indicando un atteggiamento che, gradualmente, passa da fortemente negativo a fortemente positivo (Johns, 2010).

## **1.2. Le scale a differenziale semantico**

Un'altra tipologia di scale che può essere molto utile in varie analisi di marketing è rappresentata dalle scale a differenziale semantico. Queste, come le scale di Likert, presentano modalità di risposta ordinate e generalmente in numero dispari, ma ciò che le distingue è la presenza di due espressioni di significato opposto poste agli estremi della scala, che viene per questo spesso definita “bipolare” (Russell, 2010); inoltre, in genere non viene posta nessuna etichetta al di sotto di ogni alternativa di risposta (Brace, 2008, p. 76).<sup>4</sup> Il rispondente si trova quindi a valutare l'aspetto in questione lungo un *continuum* tra i due elementi di significato opposto posti agli estremi della scala (Russell, 2010).

La valutazione andrà espressa scegliendo il punto della scala che meglio rappresenta l'idea che il rispondente ha dell'aspetto oggetto di indagine (Malhotra, 2020, p. 294). Dato che la scala presenta, generalmente, un numero dispari di punti, se viene scelto quello centrale significa che

---

<sup>3</sup> Se, al contrario, si impiegasse una scala con un numero pari di alternative di risposta, non esisterebbe una modalità neutrale e questo obbligherebbe a manifestare la propria posizione verso l'argomento, valutandolo in senso positivo o negativo (Joshi, et al, 2015). Questo, però, potrebbe causare alcune risposte non veritiere da parte di quei soggetti incerti sulla natura del loro atteggiamento verso l'argomento in esame, che sarebbero obbligati a prendere una posizione (Willits, Theodori, Luioff, 2016).

<sup>4</sup> Esistono tuttavia alcune varianti di scale a differenziale semantico in cui, oltre ai due aggettivi bipolari, è specificato il significato di ogni alternativa di risposta, a parole o mediante dei numeri (Garland, 1990).

il rispondente ha una posizione neutrale tra le due espressioni di significato opposto riguardo all'aspetto indagato (Russell, 2010). Al contrario, la scelta di un punto della scala più sbilanciato verso uno dei due estremi indica che la valutazione dell'aspetto è meglio descritta dal termine posto su quell'estremo della scala. In particolare, se il punto scelto è molto vicino a un estremo, significa che il termine posizionato su quel polo descrive molto bene l'aspetto che si sta valutando (Schmidt e Hollensen, 2006, p. 122).

### **1.2.1. L'introduzione delle scale a differenziale semantico in psicologia**

Le scale a differenziale semantico sono state formulate negli anni '50 del Novecento da parte dello psicologo americano Charles Osgood (1952). Il suo obiettivo era quello di misurare il significato dei diversi concetti, chiedendo ai rispondenti di valutarli su una serie di scale bipolari e a sette punti. L'idea di porre due termini di significato opposto agli estremi della scala è nata perché si riteneva che l'uomo avesse una tendenza naturale a pensare in termini di opposti<sup>5</sup> (Osgood, Tannenbaum, Suci, 1957, p. 327). Ogni scala andava quindi a costituire un "continuum semantico" (Osgood, 1952), lungo il quale esprimere la rappresentazione delle proprie convinzioni interiori, tradotte utilizzando il linguaggio.

Secondo l'Autore e i suoi collaboratori (Osgood, Suci, Tannenbaum, 1957, pp. 25-26) le convinzioni da cui deriva il significato di un concetto possono essere collocate all'interno di quello che è stato definito "spazio semantico". Si tratta di uno spazio euclideo multidimensionale in cui ogni concetto ha una sua collocazione – individuata da un punto nello spazio (Osgood, Tannenbaum, Suci, 1957, p. 26) – che può essere determinata sulla base delle risposte a una batteria di scale a differenziale semantico.<sup>6</sup>

I punti dello spazio semantico – e quindi i vari concetti – si distinguono tra di loro in base a due caratteristiche fondamentali: la direzione rispetto all'origine e la distanza dall'origine. La direzione è determinata dall'estremo della scala a cui il punto scelto si avvicina maggiormente: nello spazio il punto si sposterà, lungo l'asse relativo alla singola scala in questione, verso destra

---

<sup>5</sup> Negli anni, alcuni studi hanno cercato di verificare se questa tendenza delle persone a ragionare in termini antitetici fosse confermata, dando per lo più esito positivo a tale ipotesi (Bentler, 1969; Anderson, 1970; Mann, Phillips, Thompson, 1979). In particolare, sono stati replicati degli studi inizialmente condotti con delle scale a differenziale semantico – utilizzando due scale unipolari al posto di una a differenziale semantico – e si è misurato il grado di correlazione dei risultati ottenuti sulle coppie di scale unipolari (che rappresentavano i due aggettivi di significato opposto della scala bipolare); tale correlazione è risultata fortemente negativa, denotando una buona bipolarità del significato dei concetti (Mann, Phillips, Thompson, 1979).

<sup>6</sup> Il metodo di analisi dei risultati raccolti su una serie di scale a differenziale semantico proposto dagli Autori è presentato in seguito (Par. 1.5.1.).

o verso sinistra rispetto all'origine a seconda che il punto indicato sulla scala sia a destra o a sinistra del punto centrale (Osgood, Tannenbaum, Suci, 1957, p. 26). La distanza è invece data dall'intensità della valutazione – e dunque del significato –, cioè da quanto il punto scelto è vicino all'estremo di riferimento (Osgood, Tannenbaum, Suci, 1957, p. 26). Una risposta neutrale, scegliendo il punto centrale della scala, non determinerà invece alcuna distanza dall'origine.

Il nome di scale a “differenziale semantico” proposto da Osgood deriva da quello che lui chiama processo di “differenziazione” del significato di un concetto, che, secondo l'Autore, avviene inconsciamente, traducendo le proprie convinzioni interiori sull'argomento in una serie di rappresentazioni semantiche, fino a che si riesce a individuare il concetto con una posizione precisa all'interno dello spazio semantico. Due punti distanti tra loro nello spazio semantico andranno a indicare due concetti con un significato molto diverso; due punti con una distanza ridotta saranno invece due concetti a cui vengono attribuiti significati simili tra loro.

L'obiettivo degli Autori era quello di misurare il significato, soprattutto per riuscire a confrontare i diversi concetti in base alle rappresentazioni, espresse mediante il linguaggio, delle convinzioni psicologiche su di essi. Gli stessi Autori (Osgood, Tannenbaum, Suci, 1957, p. 189) hanno però riconosciuto la potenzialità delle scale a differenziale semantico anche per misurare gli atteggiamenti, rendendole in un certo senso un'alternativa alle scale di Likert. Con le scale a differenziale semantico, si possono infatti ottenere informazioni sull'atteggiamento valutato, come la sua direzione – se sia positivo o negativo – e la sua intensità.

### **1.2.2. Le applicazioni nel marketing**

Già gli stessi Osgood, Suci e Tannenbaum (1957, p. 314) avevano riscontrato anche una possibile applicazione della tecnica del differenziale semantico all'analisi delle comunicazioni di marketing e, in particolare, della pubblicità. Le politiche di comunicazione hanno, infatti, un ruolo fondamentale nel determinare le percezioni dei clienti; agendo con delle campagne pubblicitarie per modificare le convinzioni su un prodotto o su un brand, si può fare in modo che la scelta dei clienti ricada su un'impresa anziché sui suoi concorrenti (Busacca e Bertoli, 2017, p. 145). Per le imprese può quindi essere davvero utile misurare le percezioni dei clienti relative al loro prodotto o brand, sia prima dell'avvio di una campagna di comunicazione, sia dopo la sua realizzazione (Busacca e Bertoli, 2017, p. 145). Questo può essere efficacemente

effettuato usando le scale a differenziale semantico, che hanno infatti trovato una discreta applicazione negli studi sugli effetti delle comunicazioni tradizionali di marketing (Mindak, 1956), e di quelle volte a far conoscere le iniziative di *corporate social responsibility* portate avanti dalle aziende (García, Gibaja, Mujika, 2003; Markechová et al., 2013).

Nei primi decenni successivi all'introduzione della tecnica del differenziale semantico, l'ambito in cui essa è stata più largamente utilizzata è stato quello della misurazione dell'immagine associata a una certa marca (Mindak, 1961; Fry e Claxton, 1971), a un'impresa (Clevenger, Lazier, Clark, 1965), a un certo punto vendita (Dixon e Albaum, 1971; Menzes ed Elbert, 1979), o a uno specifico prodotto (Crespi, 1961). Più recentemente, questa tipologia di scale è stata impiegata per studiare l'effetto del paese d'origine dell'impresa (Jaffe e Nebenzahl, 1984; Kinra, 2006; Bose e Ponnam, 2011), ovvero le convinzioni e le immagini associate a prodotti e brand di paesi stranieri, solo per la loro origine e a prescindere dalle loro effettive caratteristiche o da specifiche politiche di comunicazione.<sup>7</sup>

Le scale a differenziale semantico possono anche essere impiegate per misurare la qualità dei servizi (Lewis e Mitchell, 1990), la *user experience* (Macedo e Silva, 2014) – cioè l'esperienza di contatto con un'impresa di servizi – oltre che per misurare la soddisfazione dei consumatori rispetto ai prodotti acquistati (Westbrook e Oliver, 1981; Wirtz e Lee, 2003).

Queste scale possono poi essere utilizzate per comprendere il significato associato al possesso di un certo prodotto (Friedmann, 1986), magari perché di un determinato brand (Kriyantono, 2017). Si tratta di una tipologia di analisi che in un certo senso rimanda all'obiettivo per il quale le scale a differenziale semantico sono state pensate, cioè la misurazione del significato – in quel caso associato a parole e concetti. Quello del significato dei prodotti è un tema molto rilevante per il marketing del giorno d'oggi. Il consumatore odierno<sup>8</sup>, infatti, tende a cercare di definire la propria identità anche attraverso i beni e servizi che compra, fondando quindi molte

---

<sup>7</sup> Un esempio potrebbe essere l'idea di qualità elevata che si ha degli elettrodomestici e dei veicoli fabbricati in Germania, così come può essere l'attribuzione di uno stile e di un design ricercato ai capi d'abbigliamento e agli elementi d'arredo realizzati in Italia (Bertoli e Valdani, 2018, p. 339).

<sup>8</sup> Oggi sempre più spesso nel marketing si parla di consumatore "postmoderno", cioè quello che, da qualche decennio a questa parte, caratterizza buona parte dei mercati. Si tratta di persone che fondano le loro scelte d'acquisto non tanto sulla mera valutazione economica dell'utilità funzionale ottenuta dal prodotto o servizio acquistato, ma che, al contrario, danno molto valore alle emozioni che la marca suscita in loro, alle esperienze che vivono nei vari momenti di contatto con il brand, e al significato – sia individuale che sociale – che associano ai prodotti o alle marche che scelgono di consumare (Hultén, Broweus, van Dijk, 2009, p. 27).

delle sue decisioni d'acquisto sul significato simbolico che associa ai prodotti o alle marche che sceglie di consumare.

Le informazioni raccolte impiegando le scale a differenziale semantico hanno poi un ruolo chiave nello sviluppo dei nuovi prodotti, come dimostrano i numerosi studi effettuati al riguardo. Da un lato, queste scale permettono di fare valutazioni su aspetti intangibili, quali ad esempio l'*appeal* del nome dei prodotti da introdurre sul mercato (Yannou e Petiot, 2013), o le emozioni suscitate nel consumatore dal prodotto in sé (Huang, Chen, Khoo, 2012) o dal suo packaging (Barnes, Southee, Henson, 2003). D'altro canto, spesso il grado di accettazione dei nuovi prodotti dipende molto anche dagli attributi concreti del bene offerto, cioè da quelle sue caratteristiche che possono essere percepite mediante i cinque sensi. Primi fra tutti gli elementi visuali, come il colore (Crowley, 1995; Aslam, 2005), che può influenzare la decisione d'acquisto, o il design (Yodgangkai e Pimapunsri, 2011), oltre agli elementi tattili (Henson et al, 2006), uditivi (Altinsoy e Jeckosh, 2012), olfattivi (Dalton et al., 2008) o gustativi (Shifferstein, 2010).

Gli studi appena richiamati rientrano nella disciplina che prende il nome di analisi sensoriale, nella quale le scale a differenziale semantico sono uno strumento di misurazione frequentemente utilizzato (Stone, Bleibaum, Thomas, 2012, p. 303).

### **1.3. Analisi sensoriale e marketing sensoriale**

L'analisi sensoriale (*sensory evaluation* o *sensory analysis* in inglese) è la disciplina scientifica che analizza e interpreta le reazioni delle persone alle diverse caratteristiche sensoriali dei prodotti, cioè ai loro attributi percepibili mediante i cinque sensi (Stone, Bleibaum, Thomas, 2012, p. 15). Si tratta di una materia che è in grado di supportare le imprese non solo nell'ambito delle ricerche di mercato, ma anche nelle altre funzioni aziendali, quali la ricerca sviluppo e il controllo qualità (Stone, Bleibaum, Thomas, 2012, p. 327). Nel marketing, però, l'analisi sensoriale può essere di grande aiuto soprattutto per quanto riguarda le attività di *product management* e, nello specifico, di sviluppo di nuovi prodotti (Iannario et al., 2012). Infatti, l'accettazione di un nuovo prodotto – e quindi il suo successo – può dipendere molto dalle risposte psicologiche suscitate, nei consumatori, dagli elementi sensoriali dei beni acquistati.

### **1.3.1. Le origini storiche dell'analisi sensoriale: il settore alimentare**

La disciplina dell'analisi sensoriale ha iniziato a essere impiegata nei primi anni del Novecento presso alcune imprese statunitensi produttrici di cibo e bevande, ma il suo grande sviluppo si è avuto negli anni '40, quando il Governo americano inizia a utilizzarla per valutare il grado di accettazione del cibo destinato all'esercito (Drake et al., 2009, p. 1).

Nel Secondo Dopoguerra, sempre più aziende del settore alimentare – soprattutto produttrici di cibo confezionato – iniziano ad avvalersi di esperti di analisi sensoriale, incaricati di suggerire quali fossero le caratteristiche che i vari prodotti dovevano avere per garantire una maggiore accettazione presso i consumatori (Stone, Bleibaum, Thomas, 2012, p. 9). Nel corso del tempo, però, la concorrenza inizia a essere sempre più intensa e anche la gamma dei prodotti inizia ad ampliarsi molto, per cercare di soddisfare al meglio le esigenze specifiche dei diversi segmenti di consumatori. Pertanto, avvalersi solamente di alcuni esperti non era più sufficiente per le imprese (Stone, Bleibaum, Thomas, 2012, pp. 10-11), perché anche per una persona esperta in questo ambito diventava difficile valutare, per ogni singola tipologia di prodotti, quali fossero le caratteristiche sensoriali necessarie per generare un buon grado di accettazione dei prodotti. Per tale ragione, le aziende si trovano a dover abbandonare questo approccio, più orientato alla produzione (Grewal, Levy, 2019, p.12), per lasciare il posto a un approccio più orientato al mercato (Cavicchi et al., 201), indirizzato cioè ad acquisire una migliore conoscenza dei bisogni dei consumatori e delle loro reazioni alle diverse caratteristiche sensoriali dei prodotti alimentari. Iniziano così a svilupparsi diverse tecniche per raccogliere informazioni direttamente presso gli utilizzatori dei prodotti (Stone, Bleibaum, Thomas, 2012, p. 11), sulla base delle quali definire poi le opportune strategie e politiche di marketing, avendo preso coscienza dell'importanza delle caratteristiche sensoriali nel determinare le decisioni d'acquisto (van Trijp e Schifferstein, 1995).

I metodi di analisi sensoriale che iniziano a essere via via utilizzati si prefiggono diversi obiettivi (Stone, Bleibaum, Thomas, 2012, pp. 54-55), quali: l'individuazione dei prodotti percepiti come simili tra loro in termini di caratteristiche sensoriali, la descrizione sensoriale dei singoli prodotti, anche per capire da dove derivino le eventuali differenze tra di loro, e la valutazione del grado di accettazione di un nuovo prodotto – o di una sua versione migliorata – da parte dei consumatori. In particolare, le scale a differenziale semantico hanno trovato, nel

tempo, una discreta applicazione nello studio dell’impatto delle caratteristiche fisiche di prodotto sull’accettazione dei potenziali clienti.

### **1.3.2. Le applicazioni negli altri settori: il marketing sensoriale**

Nel corso del tempo, le tecniche di analisi sensoriale hanno iniziato a essere applicate anche in settori diversi dal *food*, primo fra tutti quello della cosmesi, per lo studio delle caratteristiche olfattive dei prodotti, passando per quello tessile, in particolare per gli aspetti tattili legati ai tessuti, arrivando anche al settore dei trasporti – ad esempio per la progettazione del suono emesso dalle automobili durante il loro utilizzo (Pensé-Lh ritier, Bacle, Delarue, 2021, pp. 12-13). Pertanto, l’analisi sensoriale, da una disciplina prettamente incentrata sui sensi del gusto e dell’olfatto, arriva a studiare tutti e cinque i sensi.

Inizialmente, la sua principale applicazione nelle imprese resta focalizzata, in particolare, al supporto delle decisioni di prodotto – per lo sviluppo di nuove soluzioni o per l’aggiornamento della gamma esistente. Negli ultimi anni, invece, il rapporto tra *sensory analysis* e marketing si   fatto sempre pi  stretto, tanto che   stato coniato il termine “*sensory marketing*”. Si tratta del marketing sensoriale, che consiste nel definire delle strategie e nell’attuare delle attivit  operative volte a creare un’esperienza sensoriale nei consumatori, cercando di coinvolgere il maggior numero possibile dei loro sensi (Hultén, Broweus, van Dijk, 2009, p. 37).

Questa nuova branca del marketing   stata sviluppata a seguito dei cambiamenti nei comportamenti di consumo dei clienti di oggi (spesso definiti “postmoderni”), che, di frequente, fondano le loro decisioni d’acquisto, pi  che sul mero valore funzionale di un prodotto o di un servizio, su una serie di valutazioni simboliche, estetiche ed emotive (Hultén, Broweus, van Dijk, 2009, p. 37). Questo perch  il consumo  , per molte persone, divenuto un modo attraverso il quale esprimere se stessi, cio  esternare la propria identit  e l’insieme di valori in cui si crede (Hultén, Broweus, van Dijk, 2009, p. 26-30). Spesso, un prodotto di una certa marca viene scelto proprio perch  simbolo dello stile di vita a cui si vuole tendere o per le emozioni positive a esso associate. Un’impresa pu  costruire un legame emotivo cercando di trasformare in un’esperienza di valore ogni momento di contatto con i propri clienti – per esempio quando questi si recano nel punto vendita, o comprano online o sulle pagine social.   per questo che, oggigiorno, si parla molto di marketing esperienziale, e cio  dell’importanza di costruire un’esperienza d’acquisto e di consumo straordinaria (Hultén, Broweus, van Dijk, 2009, p. 173)

e quindi memorabile, grazie alle emozioni positive che essa riesce a suscitare nei consumatori. Un aspetto che contribuisce a determinare quest'esperienza per il cliente è dato proprio dagli stimoli sensoriali che, una volta elaborati dalla mente umana, generano delle percezioni che, a loro volta, sono in grado di suscitare determinate emozioni (Hultén, Broweus, van Dijk, 2009, p. 1). La maggiore efficacia di queste attività di marketing si ha quando tutti i cinque sensi vengono attivati, attraverso la presenza di varie forme di stimoli sensoriali nell'offerta del brand (Hultén, Broweus, van Dijk, 2009, p. 12). In questo modo, il legame emotivo con il cliente diventa sempre più forte, facilitando così lo sviluppo di una relazione a lungo termine.

Un ambito in cui le attività di marketing sensoriale possono giocare un ruolo cruciale per il successo delle imprese è certamente quello dei servizi, oggi molto rilevanti visto che il loro peso economico è di molto superiore rispetto a quello delle attività di produzione di beni. Essendo il servizio intangibile – in quanto consiste in un'attività che viene erogata dal produttore al fruitore – la formazione di aspettative e la valutazione della qualità del servizio avvengono principalmente guardando agli elementi tangibili che lo accompagnano, in quanto più facili da apprezzare e giudicare (Hoffman, Bateson, Iasevoli, 2007, p. 29). Tra questi elementi concreti, cruciale è sicuramente l'atmosfera in cui viene erogato il servizio, cioè l'insieme degli elementi visivi, tattili, uditivi, oltre che gli eventuali stimoli gustativi e olfattivi con cui il cliente viene in contatto durante l'erogazione dell'attività oggetto del servizio (Hoffman, Bateson, Iasevoli, 2007, p. 221). Visto che la qualità percepita in merito al servizio ricevuto dipende fortemente dalla risposta del cliente alle diverse caratteristiche sensoriali dell'ambiente di erogazione del servizio, è fondamentale che sia effettuata un'attenta pianificazione di marketing sensoriale. Le specifiche caratteristiche sensoriali dell'ambiente di erogazione del servizio possono infatti impattare sullo stato d'animo del cliente, sul suo tempo di permanenza all'interno dei locali dell'impresa, e quindi anche sulla velocità nella decisione d'acquisto del servizio (Hoffman, Bateson, Iasevoli, 2007, p. 219-228).

Ogni azienda di servizi potrà quindi progettare gli aspetti sensoriali dell'esperienza di contatto con il cliente per agire su queste variabili in modo da raggiungere i vari obiettivi strategici che si è prefissata. Così come per le imprese che erogano servizi più tradizionali, anche per i musei è fondamentale avere un'attenzione agli effetti dei diversi stimoli sensoriali sulle emozioni suscitate nei visitatori e sull'esperienza complessiva di visita. Può quindi essere molto utile

applicare alcuni degli strumenti dell'analisi sensoriale ai musei, dando origine alla cosiddetta *sensory museology* (Howes, 2014). Ad alcuni degli studi che rientrano in questa disciplina, ad esempio, si deve la recente tendenza di molti musei di essere passati da luoghi puramente visuali – nei quali il visitatore può solamente osservare le opere esposte – a luoghi che invitano le persone a toccare alcuni oggetti (Howes, 2014), per creare un'esperienza di visita più immersiva e piacevole.

Qualunque impresa che utilizzi il marketing sensoriale, non necessariamente soltanto chi eroga un servizio, tradizionale o culturale come il caso di un museo, si può trovare di fronte a situazioni in cui uno stimolo ambientale che riguarda uno dei cinque sensi vada a generare delle associazioni mentali legate ad altri sensi non direttamente stimolati. Questo è l'effetto che prende il nome di sinestesia.

#### **1.4. La sinestesia: verso il marketing multisensoriale**

“Sinestesia” è una parola che deriva dalla combinazione di due termini greci, *syn* che significa unione, e *aesthesis*, cioè sensazione (Cytowic, 2002, p. 2), e infatti si riferisce all'unione di più sensazioni diverse. Il termine descrive quelle situazioni in cui si verifica un'interazione tra i sensi (Sagiv e Ward, 2006), che avviene quando gli stimoli percepiti con uno dei cinque sensi generano, nella mente di una persona, una risposta associata a un altro senso non interessato dallo stimolo in questione. Si assiste a un evento di sinestesia, per esempio, quando a uno stimolo uditivo viene associata anche una risposta relativa alla vista: è il caso dell'associazione di colori più chiari a toni più acuti, e colori più scuri a toni più gravi (Cytowic, 2002, p. 70).

La parola sinestesia può però essere impiegata in due accezioni differenti. Può essere considerata come quella condizione medica di poche persone (Cytowic, 2002, p. 2) che hanno una rara capacità di avere queste risposte incrociate a uno stimolo sensoriale. In questa prospettiva, gli studi mirano a ricostruire il profilo dei pazienti che presentano questa condizione (Cytowic, 2002, p. 2) e ad analizzare, sotto il profilo neurologico, quali siano le regioni del cervello interessate da questo fenomeno e che permettono il suo verificarsi (Sagiv e Ward, 2006). Un'altra visione – più psicologica – vede la sinestesia come un fenomeno caratterizzato da associazioni tra stimoli e risposte relativi a più sensi diversi, che avviene frequentemente nella vita quotidiana di molte persone (Cytowic, 2002, p. 76).

Questa seconda accezione è quella condivisa, tra gli altri, anche da Charles Osgood, il quale ritiene, infatti, che la sinestesia sia «una caratteristica fondamentale della mente umana», e non un «fenomeno relativo a pochi individui» (Osgood, 1981). È proprio durante i suoi studi sul tema della sinestesia che Osgood decide di impiegare due termini di significato opposto posti agli estremi di quelle che prenderanno il nome di scale a differenziale semantico. L'Autore ritiene, infatti, che i diversi stimoli in grado di generare una risposta simile nella mente di una persona saranno collocati vicini nello spazio semantico, cioè avranno un significato psicologico analogo per quella specifica persona (Osgood, Tannenbaum, Suci, 1957, p. 21). Ciò significa che, ad esempio quando a un determinato suono viene associata una certa tonalità di colore, la risposta psicologica a quel suono e a quel colore saranno due punti molto vicini all'interno dello spazio che rappresenta le percezioni umane.

Se effettivamente il fenomeno della sinestesia non è così infrequente, le imprese possono pensare di sfruttare questo genere di interazioni tra i sensi, stimolando un certo canale sensoriale e, al contempo, generando delle reazioni cognitive ed emotive legate anche agli altri sensi. Questo approccio, che può essere definito come marketing multisensoriale (Wiedmann et al., 2018), potrebbe rivelarsi molto utile per progettare esperienze sempre più coinvolgenti per i propri clienti. Per fare ciò, però, diventa necessario disporre di strumenti che consentano di studiare quali sono le reazioni generate nella mente delle persone dai diversi stimoli sensoriali utilizzati dell'impresa. A tale scopo, le scale a differenziale semantico sono uno degli strumenti utili a comprendere quali risposte vengano suscitate nella mente delle persone dai vari stimoli, anche nel caso di elementi sensoriali in grado di generare un effetto di sinestesia. Emerge quindi l'esigenza di tecniche statistiche per poter analizzare i dati raccolti attraverso le scale a differenziale semantico, in modo da poter estrapolare, da queste, le informazioni utili alle imprese, ad esempio per supportarle nella definizione delle loro strategie di marketing sensoriale.

### **1.5. Tecniche statistiche per l'analisi delle scale a differenziale semantico**

Quando le scale di misurazione a differenziale semantico sono state introdotte, sono state formulate anche delle ipotesi sulla tipologia dei dati raccolti mediante esse e, sulla base di queste, è stata suggerita una metodologia statistica per l'analisi di tali scale. Nel corso del tempo, si è discusso sulla veridicità delle ipotesi formulate, che, se non verificate, richiederanno l'utilizzo di tecniche di analisi diverse da quelle inizialmente proposte.

### 1.5.1. La proposta originaria di Osgood: la *Factor Analysis*

Per l'analisi dei dati raccolti su scale a differenziale semantico, gli Autori che le hanno introdotte (Osgood, 1952; Osgood, Suci, Tannenbaum, 1957, p. 36) hanno proposto di impiegare l'Analisi Fattoriale<sup>9</sup>, che è una delle possibili tecniche per la riduzione della *dimensionalità* dei dati (Mazzocchi, 2008, p. 219).

Questa tipologia di scale è infatti stata pensata per poter misurare il significato attribuito a diversi termini, ritenendo che questi vengano posizionati, nella mente umana, in uno spazio semantico multidimensionale. Quest'ultimo può essere costituito da un numero piuttosto elevato di assi, ognuno corrispondente a una delle scale a differenziale semantico sulle quali viene chiesto ai rispondenti di valutare il concetto in esame (Osgood, Suci, Tannenbaum, 1957, p. 25). La batteria di scale bipolari impiegata dovrebbe essere uguale per tutti i concetti, in modo da riuscire a collocarli nel medesimo spazio semantico, così da costituire un modello generale di misurazione del significato.

Secondo Osgood (1952), non tutte le scale a differenziale semantico impiegate sono totalmente indipendenti tra loro ma, anzi, alcune sono praticamente equivalenti: è quindi possibile individuare un numero limitato di fattori, ognuno dei quali rappresenti le scale (e cioè le variabili) simili (e quindi altamente correlate tra loro). Per questo motivo viene proposto di ricorrere all'Analisi Fattoriale, con l'obiettivo di individuare il minor numero possibile di fattori (Osgood, Suci, Tannenbaum, 1957, p. 25) che rappresentino buona parte dell'informazione contenuta nei dati originali – e cioè il significato attribuito dalle persone ai diversi concetti. L'obiettivo dell'Analisi Fattoriale è infatti quello di individuare un certo numero di fattori, in modo che ognuno di essi rappresenti un insieme di alcune delle variabili originarie (cioè le scale bipolari), in particolare quelle che presentano un alto grado di correlazione tra di loro e che, al contempo, risultano poco correlate alle variabili rappresentate da altri fattori (Johnson e Wichern, p. 481).

Dall'applicazione dell'Analisi Fattoriale, Osgood, Suci e Tannenbaum (1957, pp. 44-45) hanno ricavato un modello generale di misurazione del significato che si basa sull'estrazione di tre

---

<sup>9</sup> In particolare, l'Analisi Fattoriale proposta viene svolta utilizzando il metodo del *centroide* (Osgood, Suci, Tannenbaum, 1957, p. 36), proposto da Thurstone nel 1947; si tratta di un possibile metodo per eseguire la *Factor Analysis*, anche se oggi due dei più comuni metodi con cui essa viene effettuata sono quello della componente principale (e quindi del fattore principale) e quello basato sulla massima verosimiglianza (Johnson e Wichern, 2017, p.488).

fattori, che saranno le dimensioni di un nuovo spazio semantico “semplificato” – in quanto tridimensionale – in cui rappresentare i concetti presenti, nella mente umana, in uno spazio semantico multidimensionale.<sup>10</sup> Conducendo diversi studi, gli Autori hanno infatti rilevato una certa regolarità nei risultati dell’Analisi Fattoriale: buona parte dell’informazione di partenza, contenuta nelle risposte alle scale a differenziale semantico, veniva trattenuta da tre fattori, che potevano in genere essere interpretati rispettivamente come “valutazione”, “potenza” e “attività” (Osgood, Suci, Tannenbaum, 1957, p. 44-45).

In particolare, la varianza spiegata – cioè l’informazione trattenuta – dal primo dei tre fattori risulta all’incirca doppia rispetto a quella del secondo e del terzo fattore, che, a loro volta, riescono a spiegare oltre il doppio della varianza trattenuta dai fattori successivi, che risultano quindi meno rilevanti (Osgood, Suci, Tannenbaum, 1957, p. 73), come mostra la Figura 1.1.

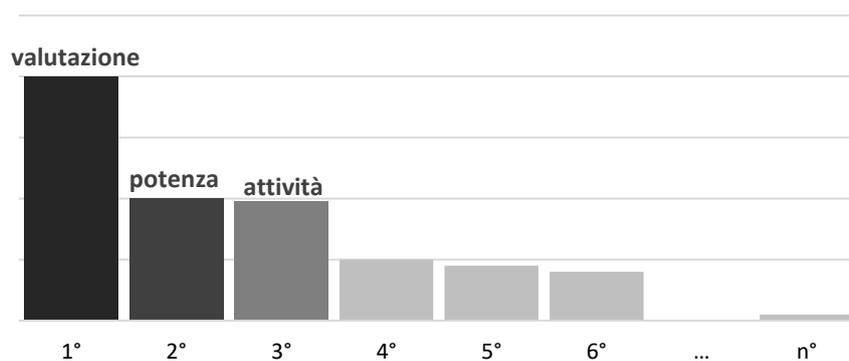


Figura 1.1 – La percentuale di varianza spiegata dai diversi fattori.

Fonte: Osgood, Suci, Tannenbaum, 1957, p. 73.

Il fattore “valutazione” racchiude quelle scale che permettono di esprimere un giudizio di valore sul concetto analizzato, ad esempio se ritenuto buono o cattivo, bello o brutto, e così via. La “potenza” sintetizza invece quelle scale a differenziale semantico che esprimono concetti come la forza, la dimensione, il peso associati all’oggetto analizzato. Il fattore “attività”, infine, riguarda le scale su cui si esprime quanto il concetto sia considerato attivo o passivo, veloce o lento e così via.

<sup>10</sup> Attraverso l’Analisi Fattoriale si riesce ad avere in uno spazio tridimensionale una rappresentazione, semplificata ma veritiera, delle convinzioni presenti nella mente umana, che è come se fosse anch’essa uno spazio euclideo, ma di dimensione elevata. Si tratta di un risultato simile a quello che può essere ottenuto mediante la tecnica del MultiDimensional Scaling (MDS), che permette di rappresentare su uno spazio di dimensione ridotta le distanze percepite espresse in uno spazio, di dimensione elevata e non nota con precisione, che rappresenta appunto la mente umana (Mazzocchi, 2008, p. 284). Diversi sono stati gli studi (ad es. Fry e Claxton, 1971) che hanno provato a confrontare i risultati ottenuti dall’Analisi Fattoriale delle scale a differenziale semantico con i risultati dell’applicazione del MDS sui giudizi di similarità tra i concetti espressi dai medesimi rispondenti.

Utilizzando i valori assunti da questi 3 fattori, ottenuti in output dell'Analisi Fattoriale, è possibile rappresentare ciascuno dei concetti oggetto di indagine nello spazio tridimensionale (rappresentato in Figura 1.2.), in base al significato attribuito dai soggetti che hanno risposto alla serie di scale a differenziale semantico.

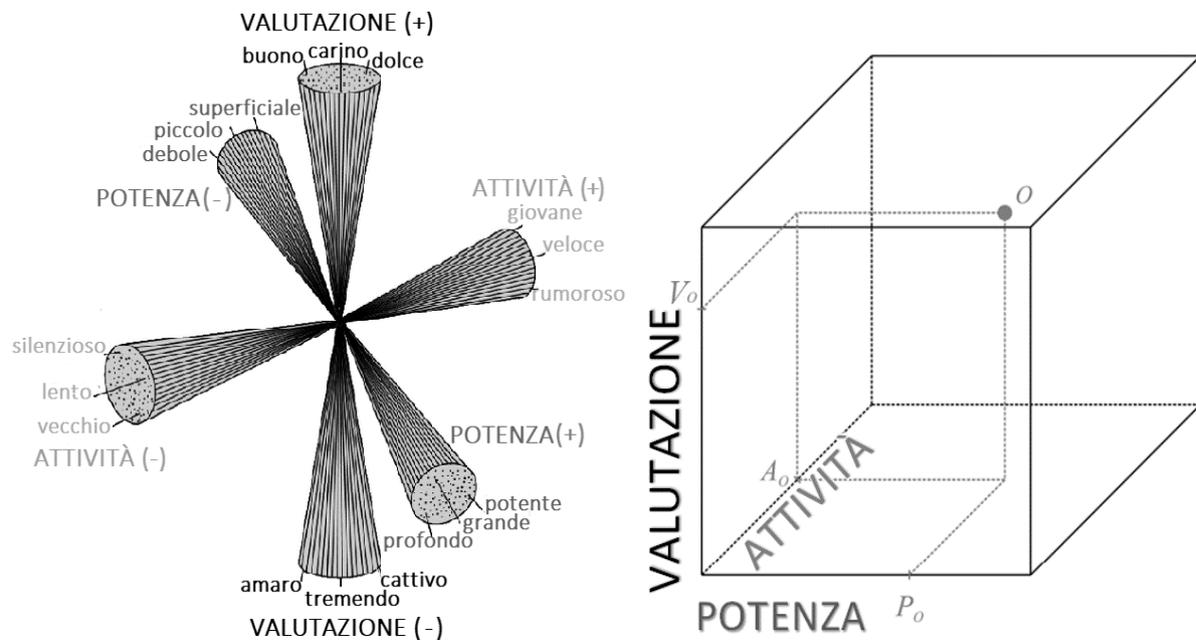


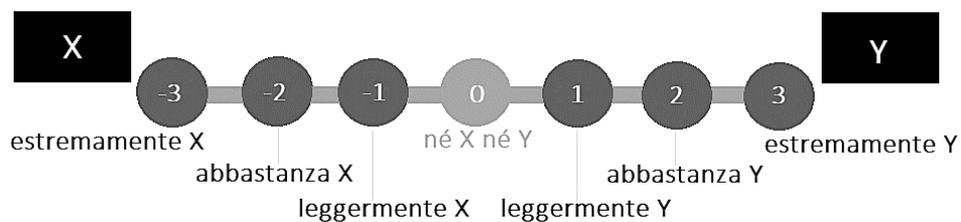
Figura 1.2. – Le tre dimensioni dello spazio in cui rappresentare il significato dei vari concetti.  
 Fonti: a) Kissler, Assadollahi, Herbert, 2006; b) Stoklasa, Talášek, Stoklasová, 2018.

La tendenza dell'Analisi Fattoriale a far emergere tre fattori interpretabili come valutazione, attività e potenza, sembra trovare riscontro in diversi studi sul significato dei concetti. Tuttavia, se le scale a differenziale semantico vengono applicate in contesti diversi da quello della misurazione del significato, scegliendo termini antitetici diversi e più adeguati all'ambito di applicazione, il numero dei fattori rilevanti potrebbe essere diverso da tre e, in ogni caso, la loro interpretazione potrebbe cambiare notevolmente (Heaps, 1972).

### 1.5.2. Le ipotesi formulate da Osgood

Un aspetto rilevante dell'Analisi Fattoriale è che essa è una tecnica pensata per l'analisi di variabili quantitative (Reise, Waller, Comrey, 2000), e dunque di dati raccolti su scale di misurazione quantomeno per intervalli – che presentano alternative di risposta equamente distanziate tra loro – se non addirittura scale di rapporti.

Gli stessi Osgood, Suci e Tannenbaum (1957, p. 29) ipotizzano che l'equidistanza tra le modalità di risposta delle scale a differenziale semantico sia garantita grazie alle istruzioni presentate all'inizio di ciascun questionario che se ne avvale. Visto che nelle scale non sono presenti delle etichette che definiscano a cosa corrisponde esattamente ogni punto della scala, prima di presentare i diversi concetti da valutare, al rispondente viene chiarito questo aspetto tramite l'utilizzo di alcuni avverbi. La Figura 1.3. mostra graficamente quali avverbi corrispondono, secondo gli Autori, ai vari punti delle scale a differenziale semantico.



*Figura 1.3. – Avverbi e valori numerici associati ai diversi punti di una scala a differenziale semantico.*

*Fonte:* Adattamento da Osgood, Suci, Tannenbaum, 1957, p. 29 e p. 86.

Il punto più estremo di una scala corrisponde all'avverbio “estremamente”, associato al termine posizionato su quel polo della scala (e indicato come “X” o “Y” nella Figura 1.3.) . La modalità adiacente, leggermente più spostata verso il centro della scala, è stata considerata come “abbastanza”. L'alternativa adiacente a quest'ultima, ancora più centrale, è ritenuta corrispondente all'avverbio “leggermente”. Infine, la scelta dell'alternativa posta esattamente al centro della scala indicherebbe indifferenza rispetto ai due termini di significato opposto posti agli estremi.

Secondo gli Autori, questi avverbi vengono percepiti dai rispondenti come delle «unità psicologiche equivalenti» (Osgood, Suci, Tannenbaum, 1957, p. 327), e, pertanto, garantirebbero che i rispondenti considerino i vari punti della scala come equidistanti tra loro, giustificando così l'applicazione dell'Analisi Fattoriale. È per questo motivo che, una volta raccolti i dati sulle scale a differenziale semantico, a ciascuna delle sette alternative di risposta gli Autori (Osgood, Suci, Tannenbaum, 1957, p. 86) suggeriscono di associare un valore numerico intero, che potrebbe andare da 1 a 7 ma che, più frequentemente, va da -3 a +3 (Figura 1.3.) passando per il valore 0 per la posizione neutrale. Questi valori numerici non rappresentano soltanto la codifica delle risposte, ma vengono proprio utilizzati in sede di analisi dei dati. Si ipotizza quindi che quelli ottenuti attraverso la batteria di scale non siano dei dati qualitativi

ordinali, bensì dei dati quantitativi, visto che la differenza tra i valori associati a due punti adiacenti della scala risulta sempre costante, e in particolare pari a 1.

Nel caso in cui l'equidistanza tra le alternative di risposta non sia, però, verificata nei dati, le scale a differenziale semantico non potranno essere considerate come variabili quantitative; quindi, i valori numerici utilizzati per la codifica non dovranno essere considerati come esatta rappresentazione delle modalità di risposta, bensì come variabili qualitative ordinali che presentano modalità ordinate ma non necessariamente equidistanti. Da questo dipenderanno le tipologie di tecniche statistiche di analisi che potranno essere applicate ai dati raccolti mediante delle scale a differenziale semantico.

### **1.5.3. Proprietà delle scale a differenziale semantico e tecniche di analisi**

Oltre a Osgood e i suoi colleghi, molti sono stati gli Autori (tra gli altri: Rothman, 1968; Coxhead e Bynner, 1981) che nei loro studi hanno applicato l'Analisi Fattoriale ai dati raccolti. Un'altra tecnica di riduzione della *dimensionalità* dei dati, proposta da altri Autori (Hogg, 1969), è l'Analisi delle Componenti Principali. Il suo obiettivo è quello di individuare un numero limitato di componenti principali<sup>11</sup> in grado di trattenere buona parte dell'informazione di partenza contenuta nelle risposte fornite (Johnson e Wichern, 2017, p. 430).

Anche per l'applicazione di questa tecnica è necessario ritenere che l'equidistanza tra le modalità di risposta sia verificata, in modo che i dati raccolti – seppur su una scala ordinale – possano essere considerati dei valori numerici, perché quantomeno equamente intervallati tra loro. Questa assunzione è necessaria perché sia l'Analisi Fattoriale, sia l'Analisi delle Componenti Principali, prevedono il calcolo di coefficienti di correlazione lineare<sup>12</sup> tra le coppie di variabili (Bishop e Herron, 2015), che a loro volta presuppongono che siano calcolate la covarianza e la varianza, la quale, a sua volta, richiede il calcolo degli scarti dalla media. Nel caso di variabili qualitative, anche qualora fossero ordinali, già il calcolo della media merita particolare attenzione (Jamieson,

---

<sup>11</sup> Le “componenti principali” sono una combinazione lineare delle variabili originarie, rappresentate da ogni singola scala a differenziale semantico. Tali componenti rappresentano le nuove variabili che vengono utilizzate, invece di quelle originarie, per mantenere buona parte dell'informazione di partenza pur trovandosi a lavorare con un numero più limitato di variabili. Per ottenere queste ultime, a differenza dell'Analisi Fattoriale, l'Analisi delle Componenti Principali non richiede che prima debba essere ipotizzata alcuna relazione tra le variabili osservate (Johnson e Wichern, 2017, p. 430).

<sup>12</sup> Non vi è tuttavia pieno accordo sull'inapplicabilità dei metodi statistici pensati per le variabili quantitative a quelle qualitative ordinali. Alcuni ritengono infatti che il coefficiente di correlazione sia robusto (Norman, 2010), tanto da giustificare, in molti casi, l'assimilazione delle scale ordinali (ad esempio quelle a differenziale semantico o di Likert) a variabili quantitative, caratterizzate almeno da intervalli costanti tra le modalità di risposta.

2004). Prendendo l'esempio di una scala ordinale su cui viene espresso un giudizio da insufficiente a ottimo (Kuzon, Urbanek e McCabe, 1996), anche qualora le alternative di risposta vengano codificate con dei numeri interi, non sarebbe opportuno calcolarne la media, perché questa potrebbe, per esempio, corrispondere a "buono e mezzo", il che sarebbe privo di significato. Questo si verifica perché, nonostante una possibile codifica numerica, le scale ordinali, così come tutte le variabili qualitative, non sono dei numeri veri e propri, e quindi non godono delle proprietà metriche che caratterizzano questi ultimi. Infatti, le alternative di risposta non sono necessariamente equidistanti, perciò calcolare la differenza tra la seconda e la prima modalità potrebbe portare a un risultato diverso dalla differenza tra la terza alternativa e la seconda. Allo stesso modo, il quoziente calcolato tra la seconda e la prima modalità potrebbe essere diverso da quello ottenuto dividendo la quarta alternativa di risposta per la seconda. Pertanto, le operazioni algebriche tra le modalità – codificate con dei numeri – di una scala ordinale, ad esempio una scala di Likert o a differenziale semantico, non dovrebbero essere effettuate (Lalla, 2017). Di conseguenza, anche l'applicazione di tecniche statistiche pensate per le variabili quantitative dovrebbe essere evitata.<sup>13</sup>

Nel caso in cui, però, si riuscissero a ottenere dalle scale di misurazione ordinali dei dati puramente quantitativi, l'informazione che si potrebbe ottenere elaborandoli sarebbe molto più elevata, perché si potrebbero applicare svariati metodi statistici che richiedono che i dati godano delle proprietà metriche. Si potrebbe, in prima istanza, pensare a delle forme grafiche di scale ordinali, sulle quali fare esprimere la valutazione lungo un *continuum*, senza dover scegliere tra un numero limitato di categorie discrete; questo metodo di misurazione potrebbe, però, essere piuttosto impreciso e non esente da problemi (Lalla, 2017). Più adatto potrebbe essere l'impiego di tecniche statistiche in grado di associare, alle diverse modalità di risposta qualitative delle scale ordinali, dei valori numerici veri e propri – quindi equidistanti tra loro – su cui si potranno applicare i metodi di analisi previsti per le variabili quantitative. Attraverso l'Analisi delle Componenti Principali Non Lineare (Linting, et al., 2007), per esempio, è possibile calcolare le

---

<sup>13</sup> In letteratura, tuttavia, questo non è del tutto pacifico: sono diversi gli autori che sostengono che l'impostazione secondo cui non si possano applicare alle scale ordinali tecniche quali l'Analisi Fattoriale o l'Analisi delle Componenti Principali sia troppo restrittiva. Le argomentazioni contro tale impostazione sarebbero basate sul fatto che essa rischierebbe di rendere inutilizzabile buona parte degli studi condotti applicando alle variabili qualitative ordinali dei metodi che richiedono che i dati godano di proprietà metriche (Norman, 2010).

quantificazioni numeriche da associare alle singole modalità delle scale ordinali, e al contempo<sup>14</sup>, effettuare la riduzione di *dimensionalità* tipica dell'Analisi delle Componenti Principali.

Più in generale, per l'analisi dei dati raccolti su scale ordinali possono essere particolarmente utili i modelli statistici a variabili latenti (Lalla, 2017), nei quali una o più variabili – dette appunto latenti – non sono direttamente osservabili e quindi misurabili, ma vengono indagate attraverso delle variabili osservabili – o manifeste – (Bartholomew, Knott, Moustaki, 2011, p. 1). Nelle scienze sociali, quali, ad esempio, la psicologia, la sociologia, l'economia e il marketing, capita frequentemente di trovarsi a studiare degli aspetti che sono latenti, in quanto difficili da misurare direttamente (Bartholomew, Knott, Moustaki, 2011, p. 1). Spesso, quindi, si cerca di indagare la variabile latente andando a misurare – frequentemente su scale di misurazione ordinali – alcune variabili manifeste (Lalla, 2017).

Si ritiene che i tratti latenti siano delle variabili continue (Agresti, 2010, p. 4), che possono cioè assumere un numero elevato – anzi, infinito – di valori (Agresti, 2013, p.3). Le variabili qualitative ordinali direttamente osservabili, al contrario, sono discrete, ossia il numero di valori che possono assumere è finito e limitato (Agresti, 2013, p. 3). I modelli a variabili latenti considerano che sottostante alla variabile osservabile discreta – alla quale i soggetti forniscono una risposta su una scala ordinale – vi sia la variabile latente continua: quest'ultima vede i suoi infiniti valori forzatamente condensati in un numero limitato di modalità di risposta discrete<sup>15</sup> (Bartholomew, Knott, Moustaki, 2011, p. 2).

Proprio basandosi sulla presenza di una variabile continua non direttamente osservabile, che viene misurata chiedendo di rispondere a una scala ordinale (cioè attraverso una variabile

---

<sup>14</sup> L'Analisi delle Componenti Principali Non Lineari, infatti, avvalendosi dell'algoritmo Alternating Least Squares, è in grado di individuare, iterativamente, le quantificazioni, mentre riduce la *dimensionalità* dei dati. In particolare, a ogni iterazione vengono aggiornate le quantificazioni e viene effettuata la riduzione di dimensione, procedendo così finché non vi è convergenza (Linting et al., 2007). L'attribuzione delle quantificazioni e la riduzione di *dimensionalità* si influenzano quindi a vicenda.

<sup>15</sup> I modelli statistici a variabili latenti sono svariati; una loro possibile classificazione li distingue in base al filone concettuale sulla base del quale sono stati sviluppati. Un primo gruppo si fonda sul cosiddetto Underlying Variable Approach (UVA), che assume che la variabile non direttamente osservabile segua una distribuzione normale (Bini et al., 2009, p. 17). In questo filone si inserisce il Structural Equation Modelling, che, in sostanza, esegue un'Analisi Fattoriale (Confermativa) dopo che è stata definita la struttura delle relazioni tra variabili latenti e manifeste (Bartholomew, Knott, Moustaki, 2011, p. 227-228). Un secondo gruppo è basato sull'Item Response Theory (IRT), filone concettuale introdotto per la misurazione delle abilità – latenti – in base alla performance di risposta a un test basato su domande corrispondenti a variabili qualitative e discrete (Bini et al., 2009, p. 30). Un esempio di modello appartenente a questo secondo filone è quello introdotto da Rasch (Bini et al., 2009, p. 31-33).

manifesta discreta), è stato elaborato il modello che prende il nome di CUB (*Combination of Uniform and Binomial*)<sup>16</sup>, presentato nel Capitolo 2. A partire da questo modello, ne è stato sviluppato un altro denominato CUM (*Combination of Uniform and Multinomial*), che verrà discusso nel Capitolo 3; esso è stato introdotto come tecnica specifica per l'analisi delle scale a differenziale semantico. In letteratura, infatti, i tentativi di costruire un modello *ad hoc* per queste scale di misurazione sono stati pressoché assenti, portando i ricercatori a impiegare dei metodi più generali pensati per le variabili ordinali, di frequente, gli stessi impiegati anche per l'analisi delle scale di Likert. Come discusso in precedenza (cfr. Par. 1.2), molti sono i punti di contatto tra queste ultime e le scale a differenziale semantico, ma esistono anche importanti differenze che, se opportunamente prese in considerazione nella formulazione di un modello, potrebbero migliorare la qualità delle analisi di questa tipologia di dati.

In questo modo, le aziende che si avvalgono delle scale a differenziale semantico nelle loro ricerche di mercato, potrebbero ottenere informazioni ulteriori rispetto a quelle generate applicando i modelli più tradizionali, riuscendo così a migliorare le loro attività di marketing.

---

<sup>16</sup> Il modello CUB è una tecnica di recente introduzione, pensata come uno strumento aggiuntivo per l'analisi dei dati ordinali, in grado di fornire una prospettiva in parte nuova rispetto ai modelli più consolidati dei filoni UVA e IRT (Bini et al., 2009, p. 100). In particolare, la sua peculiarità è quella di introdurre in un modello la componente di incertezza nella scelta della risposta sulla scala ordinale (Piccolo, Simone, Iannario, 2019), che emerge proprio perché il rispondente si trova a dover rappresentare un suo tratto latente continuo su un supporto discreto.

## CAPITOLO 2

### **MODELLI CUB PER L'ANALISI DEI DATI ORDINALI**

Il modello che prende il nome di CUB (acronimo di *Combination of Uniform and Binomial*) deriva dalla combinazione di due variabili casuali: una Uniforme discreta e una Binomiale traslata. Ognuna di esse rappresenta una componente del processo psicologico che si realizza nella mente di una persona quando le viene chiesto di esprimere una propria percezione tramite una scala ordinale, ad esempio una scala di Likert.

Il CUB è quindi un modello probabilistico che mira a rappresentare al meglio la distribuzione di frequenze delle risposte a una scala ordinale, ossia il numero di volte che ogni alternativa viene scelta da un rispondente. La capacità del modello di adattarsi ai dati osservati può variare in base a come le risposte si distribuiscono tra le diverse categorie; è importante, quindi, valutare con opportuni indici il livello di adattamento del modello.

Il CUB, attraverso la stima dei suoi parametri, individua la probabilità che ogni alternativa di risposta ha di essere scelta; è bene che questo valore sia il più possibile simile all'effettiva frequenza relativa osservata. Se il modello è una buona rappresentazione dei dati osservati, esso può essere impiegato per ottenere informazioni ulteriori, cioè delle indicazioni sulle due componenti latenti del processo psicologico che il modello cerca di rappresentare attraverso i suoi parametri. Nel caso vengano impiegate più scale in una batteria di *item* (ad esempio in scala di Likert) – al fine di valutare più aspetti di un fenomeno complesso (spesso latente, come la soddisfazione, per esempio) – sarà possibile confrontare se e come variano le due componenti del processo mentale affrontato dalle persone nel rispondere ai diversi *item* indagati.

Le applicazioni del modello CUB sono molteplici, in quanto le scale di misurazione ordinali vengono impiegate in vari tipi di analisi, in particolar modo nelle scienze sociali. Nel marketing, questa classe di modelli viene frequentemente applicata per la misurazione della soddisfazione dei clienti (Iannario e Piccolo, 2010a) rispetto ai beni acquistati, per l'analisi della qualità dei servizi di cui hanno fruito (ad esempio di quelli educativi: Iannario e Piccolo, 2011; Corduas, Iannario, Piccolo, 2009), oltre che per indagare le preferenze dei consumatori (Cicia et al., 2008). I modelli CUB hanno poi trovato discreta applicazione anche nel campo dell'analisi sensoriale (per esempio in Iannario et al., 2012).

## 2.1. La classe dei modelli CUB

Il CUB (*Combination of Uniform and Binomial*, cioè Combinazione di una variabile casuale Uniforme e di una Binomiale) è un modello statistico introdotto nei primi anni 2000 per l'analisi dei dati ordinali (D'Elia e Piccolo, 2005).<sup>17</sup> In particolare, l'attenzione degli Autori a cui si deve la sua formulazione si è concentrata sui dati relativi alle preferenze espresse dalle persone rispetto a vari aspetti, che possono essere: prodotti, servizi, marche, ma anche affermazioni, situazioni, comportamenti e così via (Piccolo, 2006).

L'esigenza di disporre di modelli specifici per l'analisi dei dati raccolti su scale ordinali deriva (come presentato nel Capitolo 1, cfr. Par. 1.5.3.) dalle peculiarità di queste scale, che non godono di proprietà metriche. Tra questi modelli, insieme a quelli più tradizionali e consolidati nel tempo, rientra la più recente classe dei modelli CUB. La sua originalità sta nella possibilità di modellizzare il processo che si verifica, nella mente delle persone, quando a queste viene chiesto di esprimere una propria preferenza scegliendo una delle categorie discrete di una scala ordinale. I modelli CUB sono stati pensati per poter sintetizzare la distribuzione delle preferenze espresse da  $n$  rispondenti su una scala ordinale (Cicia et al., 2008), stimando i due parametri della variabile casuale associata al modello, rappresentativi delle due componenti del processo psicologico di risposta (Tomaselli, Cantone, D'Agata, 2020).

### 2.1.1. Gli obiettivi dei modelli CUB

Quelli rientranti nella classe CUB sono dei modelli statistici, cioè delle distribuzioni di probabilità che cercano di approssimare un fenomeno, basandosi su una serie di dati osservati che lo riguardano (Konishi e Kitagawa, 2008, p. 1). In particolare, il CUB è un modello mistura (D'Elia e Piccolo, 2005) – cioè una combinazione lineare di due distribuzioni di probabilità, un'Uniforme discreta e una Binomiale. Questa sua caratteristica garantisce al modello una discreta capacità di adattarsi a varie forme di distribuzioni di frequenze (D'Elia e Piccolo, 2005).

---

<sup>17</sup> Si tratta quindi di un modello relativamente recente se confrontato con la maggior parte delle altre tecniche statistiche più tradizionali. Con molte di quelle impiegate di solito per l'analisi di variabili qualitative ordinali, la classe dei modelli CUB condivide l'approccio fondato sulle variabili latenti. Molte affinità, ad esempio, si riscontrano con le tecniche che rientrano nell'Item Response Theory, e, in particolare con quelle riconducibili al Generalized Linear Model (GLM), uno dei più importanti modelli per l'analisi dei dati ordinali, che viene condotta utilizzando distribuzioni appartenenti alla famiglia delle esponenziali (Iannario, 2007). Un'importante differenza tra i modelli rientranti nel GLM e la classe CUB è data dal fatto che quest'ultima si basa su una distribuzione Binomiale e una Uniforme discreta. La novità più importante introdotta dai modelli CUB riguarda il tentativo di ricostruire il processo psicologico che guida la risposta alle scale ordinali, cercando di modellare direttamente la probabilità che ciascuna categoria di risposta ha di essere scelta dai rispondenti (Piccolo, Simone, Iannario, 2019).

Le finalità di un modello statistico non si esauriscono, però, nella mera descrizione dei dati osservati (Konishi e Kitagawa, 2008, p. 2): ottenendo una distribuzione di probabilità che rappresenta un fenomeno è, anzitutto, possibile effettuare previsioni sul suo andamento in situazioni ipotetiche e future, dando al modello una valenza previsionale (Konishi e Kitagawa, 2008, p. 2). Quando il modello viene costruito basandosi su un'approfondita conoscenza dei meccanismi che regolano un fenomeno, è possibile impiegarlo per arricchire l'informazione ricavabile dai dati osservati (Konishi e Kitagawa, 2008, p. 2). Questo è esattamente ciò che avviene nei modelli CUB, che cercano di ricostruire il processo mentale che le persone affrontano quando manifestano una loro percezione attraverso una scala ordinale.

La classe dei modelli CUB, a partire dai dati ordinali osservati e dopo aver proceduto alla stima dei parametri, permetterà di descrivere, in modo approssimato, la distribuzione di probabilità della scelta di un insieme ordinato di alternative, che formano la scala ordinale su cui esprimere la propria preferenza (Iannario e Piccolo, 2010a). In questo modo, sarà possibile effettuare delle previsioni sulle preferenze della popolazione di interesse rispetto all'argomento in analisi (Iannario e Piccolo, 2010a). L'aspetto più rilevante è che il modello, proprio perché è costruito come combinazione delle due variabili casuali discrete, consente di dare una misura quantitativa delle due componenti più rilevanti del processo psicologico che porta i rispondenti a manifestare la propria preferenza scegliendo una determinata alternativa di risposta.

### **2.1.2. L'analisi delle preferenze**

La formulazione originaria del modello CUB risale ai primissimi anni 2000 (Piccolo, 2003; D'Elia, 2003) e inizialmente era denominata MUB<sup>18</sup>, da *Mixture of Uniform and Binomial*, ovvero modello Mistura di una variabile casuale Uniforme e di una Binomiale (Iannario e Piccolo, 2012). Il principale obiettivo del modello è sempre stato quello dell'analisi delle preferenze espresse su scale ordinali. Nei primi anni di studi in materia, però, l'attenzione era posta soprattutto sulle preferenze raccolte tramite una particolare tipologia di dati, definiti

---

<sup>18</sup> L'acronimo MUB viene talvolta utilizzato per riferirsi alla variabile casuale data dalla combinazione lineare dell'Uniforme discreta e della Binomiale traslata. Tale v.c. è l'unica componente del modello CUB quando questo non include le cosiddette "covariate" (Iannario e Piccolo, 2010a), per questo motivo a volte – soprattutto nei primi anni dall'introduzione – il modello era chiamato direttamente MUB. Al contrario, il modello che utilizza le *covariate* viene sempre indicato come CUB, perché oltre alla componente stocastica rappresentata dalla v.c. MUB, il modello include altre componenti necessarie all'utilizzo delle *covariate*. Queste ultime sono delle variabili che esprimono determinate caratteristiche dei rispondenti, sulla base delle quali questi ultimi possono essere suddivisi in gruppi; in questo caso il modello stimerà i due parametri per ciascuno dei gruppi individuati.

“*ranking*”, cioè graduatorie o classifiche. Tali dati prevedono che alle persone venga chiesto di scegliere in che ordine disporre una serie di aspetti riguardanti un fenomeno, elaborando quindi una classifica di gradimento che va dall’elemento preferito fino a quello meno preferito (Iannario e Piccolo, 2010a). In un’analisi di questo tipo, la preferenza più forte corrisponde alla prima posizione nella graduatoria, mentre l’elemento meno preferito sarà quello posto in ultima posizione. Il parametro del modello che esprime l’intensità della preferenza è stato quindi pensato per le situazioni in cui alle posizioni rappresentate dai numeri più bassi corrispondano le preferenze più alte e viceversa.

Quello appena citato è un aspetto da tenere in considerazione in ragione del fatto che, già a partire da pochi anni dopo l’introduzione del modello, esso viene impiegato prevalentemente per l’analisi di un’altra tipologia di dati, i cosiddetti “*rating*”, cioè i giudizi di preferenza. Questi vengono rilevati utilizzando una scala ordinale, per esempio chiedendo di esprimere il proprio livello di accordo con delle affermazioni attraverso delle scale di Likert. In questa tipologia di dati, il rispondente manifesta direttamente la sua preferenza, scegliendo, tra le modalità ordinate che costituiscono la scala, quella che meglio rappresenta la sua percezione sul fenomeno (Iannario e Piccolo, 2010a). A differenza dei dati di tipo *ranking*, essendo quello espresso nei *rating* un giudizio, l’alternativa di risposta codificata dal numero più basso indicherà la minore preferenza, mentre sarà quella rappresentata dal numero più elevato a individuare la preferenza più forte. Il modello di analisi, nonostante questa differenza, non viene in alcun modo modificato rispetto alla formulazione originaria: il parametro che esprime l’intensità della preferenza andrà quindi interpretato in modo opposto rispetto al caso dei dati di tipo graduatoria (Iannario e Piccolo, 2016a), perché in questo caso non vale più che le preferenze più forti corrispondano alle posizioni rappresentate dai numeri più bassi.

Il modello CUB vede la preferenza del rispondente – espressa elaborando una classifica o dando un giudizio – come il risultato finale di un processo psicologico mediante il quale una persona cerca di manifestare un suo tratto interiore, quindi latente e non facilmente misurabile (Iannario e Piccolo, 2011). Questo tratto, ossia la preferenza, può essere analizzato tramite il modello perché questo effettua alcune ipotesi sulla tipologia di processo decisionale che, inconsciamente, la mente delle persone si trova a svolgere quando viene chiesto loro di rispondere a una domanda di tipo *ranking* o *rating*.

Nel corso del tempo, diversi Autori hanno proposto varie modifiche alla formulazione originaria del modello CUB, mantenendone l'ipotesi relativa alle due componenti del processo mentale di scelta della risposta su una scala ordinale. È per questo che spesso si parla di “classe” dei modelli CUB per ricomprendere sia la formulazione originaria, sia le sue successive estensioni elaborate a partire dalle medesime ipotesi in merito al processo decisionale (Piccolo e Simone, 2019).

## **2.2. Il processo decisionale ipotizzato**

Quando a una persona viene richiesto di valutare un tratto latente – e quindi continuo (Agresti, 2010, p. 2) – attraverso una scala che presenta un numero finito di alternative di risposta, nella sua mente avviene un processo complesso (Iannario e Piccolo, 2011). Si tratta di quello che viene spesso definito come “*elicitation mechanism*” (D'Elia e Piccolo, 2005), ovvero il meccanismo di manifestazione della propria preferenza o della propria percezione.

La variabile latente che si desidera misurare può essere infatti rappresentata da una preferenza del soggetto rispetto a una categoria di oggetti o di concetti, oppure, più in generale, da una qualsiasi percezione, ad esempio relativa al valore, alla performance o alla qualità dell'elemento da valutare (Corduas, Iannario, Piccolo, 2009). Una persona ha una percezione quando riesce a elaborare le informazioni che ha raccolto dall'esterno – mediante i cinque sensi – relativamente a un certo oggetto di analisi (Iannario e Piccolo, 2011). Queste informazioni vengono organizzate e interpretate (Iannario e Piccolo, 2010b) in modo da attribuire loro un significato; ciò consente al soggetto di sviluppare delle solide convinzioni (Busacca e Bertoli, 2017, p. 141) in merito all'oggetto in questione.

Quando devono esprimere una loro percezione avvalendosi di una scala ordinale, le persone si trovano a dover effettuare un ulteriore processo mentale che è quello della valutazione (Corduas, Iannario e Piccolo, 2009). Si tratta di un meccanismo inconscio che, sulla base della percezione che si ha nella propria mente riguardo a un certo oggetto di valutazione, mira a esprimere il proprio giudizio in merito a quest'ultimo, cercando di scegliere tra un insieme limitato di giudizi rappresentati dai punti di una scala ordinale che viene proposta (Iannario e Piccolo, 2016b). Per esempio, nel caso delle scale di Likert, il rispondente dovrà valutare l'argomento indagato scegliendo, tra un numero limitato di alternative, quella che meglio esprime il suo livello di accordo con un'affermazione proposta.

La scelta finale dell'alternativa di risposta, sul supporto discreto della scala di misurazione, è pertanto il risultato di questi complessi meccanismi psicologici. Attraverso i modelli CUB è possibile stimare, a partire dai dati raccolti, due parametri che, secondo gli Autori, rappresentano le due componenti più rilevanti nel processo mentale di manifestazione delle percezioni (D'Elia e Piccolo, 2005). Si tratta della componente definita "*feeling*", relativa alle convinzioni soggettive legate all'oggetto di indagine, e della componente di "incertezza" intrinseca nella scelta della risposta sulla scala ordinale (D'Elia e Piccolo, 2005). Il *feeling* e l'incertezza sono due componenti latenti del meccanismo di manifestazione delle preferenze (Corduras, Iannario, Piccolo, 2009), perché non sono direttamente osservabili dalle risposte raccolte; mediante la stima dei parametri del modello CUB è però possibile ottenere delle informazioni su di esse.

Il processo di risposta a un questionario, specialmente se volto a indagare tratti latenti come preferenze e percezioni, si articola in una serie di fasi (Iannario e Piccolo, 2016b). Si parte con la comprensione della domanda, seguita dal recupero dell'informazione richiesta attivando la memoria, passando poi alla formulazione vera e propria del giudizio verso l'oggetto indagato, cercando infine di mappare questo giudizio all'interno di una delle categorie di risposta proposte (Tourangeau, Rips, Rasinski, 2000, p. 8). In questo processo psicologico intervengono due diverse tipologie di aspetti: quelli "percettivi", ossia legati all'idea del rispondente rispetto all'*item* da valutare, e quelli "decisionali", relativi cioè all'utilizzo che il rispondente fa della scala di risposta fornita (Iannario e Piccolo, 2016b). È per questo motivo che gli Autori (D'Elia e Piccolo, 2005) hanno pensato di introdurre due componenti nel modello: quella di *feeling*, legata alla percezione rispetto a un argomento, e quella relativa all'incertezza nella scelta della modalità di risposta tra quelle fornite. In particolare, l'elemento innovativo (Piccolo e Simone, 2019) del modello CUB è proprio quello di considerare rilevanti per la scelta finale, oltre che gli aspetti legati alla preferenza, anche quegli elementi di indecisione sintetizzati dalla componente di incertezza.

Entrambe le componenti latenti sono in qualche modo influenzate sia da elementi interni al soggetto, sia da aspetti esterni (Iannario e Piccolo, 2010a); la componente di *feeling*, tuttavia, viene a dipendere soprattutto da motivazioni interne all'individuo, relative alle sue percezioni, alle sue emozioni e al suo modo di ragionare (Iannario, 2007). La componente di incertezza

riguarda invece aspetti esogeni alla percezione ma inerenti al processo di decisione e può dipendere sia da aspetti riguardanti il rispondente, sia dal contesto in cui si trova a rispondere al questionario (Iannario e Piccolo, 2016a).

### **2.2.1. La componente di *feeling***

Il significato esatto della componente individuata con il termine generico di “*feeling*” dipende dalla specifica analisi che si sta conducendo e dal modo in cui viene formulata la domanda che mira a raccogliere una valutazione di una percezione del soggetto attraverso una scala ordinale. A seconda dei casi, infatti, questa componente può riferirsi al grado di soddisfazione, alla percezione di qualità, di valore, di importanza associata a un aspetto, al livello di accordo con un’affermazione proposta e così via (Iannario e Piccolo, 2016a; Iannario e Piccolo, 2016b). In ogni caso, il *feeling* esprime l’impressione che il rispondente ha nei confronti dell’*item* che gli viene chiesto di valutare (Iannario e Piccolo, 2010b); esso dipende quindi dagli elementi attinenti all’oggetto di analisi (Manisera e Zuccolotto, 2014a), ovvero quei fattori che determinano la percezione, e cioè che concorrono a far maturare delle convinzioni in merito al significato associato all’aspetto analizzato e dunque a sviluppare un’idea al riguardo.

La percezione, e dunque il *feeling*, di un soggetto nei confronti di un certo aspetto, dipendono anzitutto dalla comprensione dell’argomento indagato, dalla conoscenza del rispondente al riguardo o dalla sua esperienza pregressa (Iannario e Piccolo, 2011), dal suo modo di ragionare e dalle emozioni che l’argomento suscita in lui (Manisera e Zuccolotto, 2014a). Inoltre, le percezioni delle persone possono formularsi in modi differenti a seconda della loro cultura, dell’istruzione ricevuta, della famiglia di origine, dell’ambiente in cui sono vissuti, dalla pressione dei media e dell’opinione pubblica (Iannario e Piccolo, 2016b).

### **2.2.2. La componente di *uncertainty***

Ogni processo di risposta a una scala ordinale include anche una certa componente di incertezza soggettiva dei rispondenti nel formulare la loro scelta finale (Iannario e Piccolo, 2011). Su questa componente impattano elementi diversi da quelli specificamente attinenti alla percezione dell’oggetto di analisi. Il livello di incertezza dipende, anzitutto, dalle condizioni in cui si trova la persona al momento della compilazione del questionario, quali, ad esempio, il suo stato d’animo, il tempo a sua disposizione e l’ambiente circostante (Iannario e Piccolo, 2016a). Influiscono poi gli aspetti strettamente relativi al questionario, come la tipologia di scala

impiegata (Iannario e Piccolo, 2016b), la complessità o la vaghezza della domanda, e la modalità di raccolta dei dati (Piccolo, 2015): ad esempio la presenza dell'intervistatore può aumentare il rischio di risposte date soltanto perché socialmente accettabili o per soddisfare l'interlocutore, ma non perché davvero rappresentative della propria percezione. Rilevanti sono anche gli elementi che derivano dallo specifico oggetto di analisi che, pur non impattando direttamente sulla percezione del rispondente, sono in grado di influenzare la risposta al questionario. La probabilità di una scelta casuale, per esempio, aumenta quando l'interesse personale verso l'argomento indagato è basso, la quantità di informazioni che il rispondente possiede su di esso è scarsa (Iannario e Piccolo, 2016a), o la persona ha avuto poche esperienze relative al fenomeno indagato. Infine, anche alcune caratteristiche strettamente personali del rispondente possono influenzare la scelta: un rispondente annoiato, svogliato e poco motivato avrà tipicamente una componente di incertezza più importante, così come nel caso in cui abbia una scarsa autostima (Iannario e Piccolo, 2016a); un'elevata fiducia in sé, al contrario, tende a ridurre l'incertezza (Corduas, Iannario e Piccolo, 2009).

### **2.3. La variabile casuale CUB**

I modelli CUB, tenendo conto delle due componenti di *feeling* e incertezza che caratterizzano il processo decisionale, hanno l'obiettivo di calcolare, per ciascuna categoria di risposta, la probabilità che essa venga scelta (Iannario e Piccolo, 2016b).

Per questo scopo è necessario introdurre una variabile casuale – discreta, perché il numero di alternative di risposta è finito – che deve essere caratterizzata da flessibilità, cioè la capacità di adattarsi a varie distribuzioni di dati osservati, e da parsimonia (Piccolo, 2006), ovvero la presenza di un numero limitato di parametri, in modo che il modello non risulti eccessivamente complesso (Iannario e Piccolo, 2016b). Questa variabile casuale deve poi essere in grado di tenere conto delle due diverse componenti latenti – e dunque continue (Piccolo, 2006) – ossia il *feeling* e l'incertezza, che determinano la scelta di una tra le possibili alternative di risposta di una scala ordinale. Per fare questo, è stata introdotta la variabile casuale “CUB”<sup>19</sup>, che è una

---

<sup>19</sup> Talvolta, come anticipato, la variabile CUB viene anche individuata dall'acronimo MUB, a sottolineare il suo carattere di mistura delle due distribuzioni di probabilità. Oltre alla variabile casuale data dalla mistura dell'Uniforme discreta e della Binomiale traslata (MUB), che rappresenta la componente stocastica del modello, quando vengono utilizzate le *covariate* il modello deve includere anche altre due componenti (sistematiche) che permettono di legare i parametri del modello alle *covariate* relative ai rispondenti (Piccolo e Simone, 2019).

combinazione lineare convessa<sup>20</sup> di altre due variabili casuali: una Binomiale traslata e una Uniforme discreta, che rappresentano rispettivamente la componente di *feeling* e di incertezza (D’Elia e Piccolo, 2005). Il CUB è quindi un modello mistura che combina due diverse distribuzioni di probabilità, una che riflette la percezione – e dunque l’impressione più o meno positiva – del rispondente verso l’oggetto di analisi, e un’altra che tiene conto della scelta in condizioni di incertezza.

Il fatto che la variabile casuale CUB esprima la combinazione di queste due forze contrastanti del processo decisionale permette di darle due interpretazioni differenti. La prima è quella di considerare che, tra tutti i rispondenti, una certa percentuale di persone prenda una decisione in condizioni di piena incertezza, e cioè in modo casuale, e che la restante percentuale compia invece una scelta totalmente consapevole e ponderata (Piccolo e Simone, 2019). Una seconda interpretazione permette di considerare che, per ciascuno dei rispondenti, entrino in gioco entrambe le componenti (Piccolo e Simone, 2019): a ostacolare una scelta totalmente soppesata della propria preferenza entra in gioco una componente più o meno grande di incertezza soggettiva, che può essere in grado di alterare la risposta del soggetto.

### **2.3.1. La v.c. Binomiale traslata**

Gli Autori (D’Elia e Piccolo, 2005) hanno proposto di rappresentare, all’interno del modello CUB, la componente di *feeling* tramite una variabile casuale Binomiale, che, in particolare, è traslata sul suo supporto per adeguarsi al fatto che, nelle scale ordinali, la prima alternativa viene solitamente rappresentata dal numero 1, a differenza della distribuzione Binomiale tradizionale il cui il supporto parte da 0 (Piccolo, 2006).

La scelta di questa distribuzione di probabilità è giustificata, anzitutto, sul piano pratico: si tratta di una delle distribuzioni di probabilità più semplici tra quelle discrete, che presenta anche un supporto finito – così come è finito il numero di categorie di una scala ordinale – e che garantisce la parsimonia del modello (Piccolo, 2006), avendo due soli parametri dai quale dipende (Iannario e Piccolo, 2016a). Al contempo, questa distribuzione conferisce al modello un’elevata flessibilità, in quanto permette di adattarsi bene a varie tipologie di dati, visto che nella variabile Binomiale la moda può essere posizionata in qualunque punto del supporto (Iannario e Piccolo, 2016a).

---

<sup>20</sup> Una combinazione lineare è una somma pesata di elementi ed è definita convessa quando i pesi sono tutti non negativi e sommati risultano pari a 1.

Inoltre, la scelta della Binomiale è giustificata anche sul piano probabilistico, sulla base delle relazioni tra le varie distribuzioni di probabilità. Quando si cerca di esprimere attraverso un numero discreto di categorie un tratto latente – e quindi continuo (Agresti, 2010) – come quello rappresentato da una preferenza o da una percezione, si può ritenere che la distribuzione discreta ottenuta possa essere approssimata da una Binomiale, almeno nel caso in cui la variabile latente sia unimodale (Iannario e Piccolo, 2016a). Infatti, Piccolo (2006) afferma che si può ipotizzare che una preferenza segua una distribuzione gaussiana, in quanto svariate sono le cause che la determinano. L'approssimazione discreta di una variabile casuale normale può essere efficacemente ottenuta tramite una Binomiale (Piccolo, 2006).

Da un punto di vista strettamente statistico, la variabile casuale Binomiale «indica il numero di successi in  $n$  prove Bernoulliane» (Cicchitelli, D'Urso, Minozzo, 2017, p. 324), infatti essa corrisponde alla somma di  $n$  variabili casuali di Bernoulli, ognuna delle quali riguarda una prova il cui esito è dicotomico, ossia può essere rappresentato alternativamente da un successo o da un insuccesso. In un certo senso, la componente di *feeling* del modello CUB mira proprio a contare il numero di “successi” di una certa categoria di risposta (Iannario e Piccolo, 2016a) su un totale di  $m - 1$  prove. Il parametro della distribuzione Binomiale che esprime il numero di prove indipendenti – tipicamente indicato con  $n$  – nel caso del modello CUB corrisponde al numero  $m$  di categorie presenti nella scala ordinale meno 1. Ciò si deve al fatto che, in una scala ordinale con  $m$  alternative di risposta, ciascuna categoria viene confrontata con ognuna delle altre modalità, secondo il meccanismo dei cosiddetti “confronti appaiati” (*paired comparison* in inglese, cfr. D'Elia, 2000).

Data una scala con  $m$  categorie, si può ritenere che ogni modalità venga confrontata, tipicamente in modo inconscio da parte della mente umana, con ognuna delle altre  $m - 1$  categorie presenti. Quando viene scelta una certa categoria (che si può indicare con  $r$ ) significa che, durante gli  $(m - 1)$  confronti, essa ha prevalso su un certo numero di altre modalità. È proprio questo il numero di “successi” rilevato dalla variabile casuale Binomiale traslata, cioè il numero di volte in cui la categoria  $r$  ha “vinto” sulle altre categorie, perché queste ultime erano ritenute troppo deboli per rappresentare la percezione del rispondente (Iannario e Piccolo, 2016a).

Il modello CUB considera che la probabilità che venga scelta una specifica categoria di risposta  $r$  sia equivalente alla probabilità di ottenere  $(r - 1)$  “successi” nelle  $(m - 1)$  “prove

Bernoulliane” rappresentate dai singoli confronti appaiati. Questo deriva dal fatto che se, ad esempio, viene scelta la terza categoria della scala ordinale, significa che questa ha prevalso due volte quando è stata confrontata con la prima e con la seconda categoria, le quali non sono state ritenute sufficientemente forti per rappresentare la percezione oggetto di analisi. Qualora venisse invece scelta la quinta alternativa, significherebbe che essa ha prevalso in ben quattro confronti appaiati, rispettivamente con la prima, la seconda, la terza e la quarta categoria di risposta.<sup>21</sup>

Il risultato di ogni confronto appaiato presenta un esito dicotomico, cioè può essere rappresentato dal successo o dall’insuccesso della categoria  $r$ . A questo genere di confronto può quindi essere associata una variabile casuale di Bernoulli (D’Elia, 2000), il cui parametro – solitamente indicato con  $p$  – nel caso del modello CUB è rappresentato da  $1 - \xi$ ; questo parametro esprime la probabilità che l’alternativa  $r$  prevalga sull’altra con la quale viene confrontata.<sup>22</sup> La funzione di massa di probabilità associata al singolo confronto appaiato risulta quindi pari a:  $f(I_r) = p^{I_r} \cdot (1 - p)^{1-I_r}$ , dove  $I_r$  è la variabile indicatore che assume il valore 1 o 0 a seconda che, nel confronto appaiato con un’altra categoria, la categoria  $r$  risulti o meno vincente sull’altra.

Il numero di successi in un certo numero di prove indipendenti<sup>23</sup> di tipo Bernoulliano è rappresentato dalla distribuzione Binomiale, che corrisponde alla somma di tante variabili di Bernoulli indipendenti quante sono le prove totali. Nell’ambito del modello CUB, il numero di prove (solitamente indicate con  $n$ ) è dato dal numero dei possibili confronti appaiati, perciò, si

---

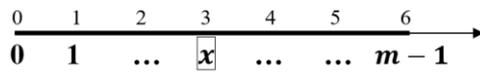
<sup>21</sup> Il medesimo ragionamento può essere effettuato *a contrario*: è del tutto equivalente, ai fini della distribuzione binomiale, contare il numero di “insuccessi” e dunque di volte in cui la categoria  $r$  in un certo senso “perde”, ossia viene scelta rispetto alle  $(m - r)$  categorie più grandi con cui viene confrontata, perché queste risultano eccessive per rappresentare una percezione che, invece, non è così forte da poter essere rappresentata dalle categorie più grandi. Questa interpretazione alternativa è valida e perfettamente equivalente perché è possibile dimostrare che il coefficiente binomiale – necessario per il calcolo della funzione di probabilità della Binomiale traslata – calcolato su un totale di  $(m - 1)$  confronti appaiati rispetto a  $(m - r)$  insuccessi – è equivalente al coefficiente calcolato negli  $(m - 1)$  confronti per  $(r - 1)$  successi (Iannario e Piccolo, 2016a).

<sup>22</sup> Nel modello CUB, inizialmente pensato per i dati di tipo *ranking*, il parametro che è stato introdotto per esprimere la probabilità di successo in un confronto appaiato era indicato con  $\xi$ . Quando però il modello viene impiegato per l’analisi dei giudizi (*rating*) di preferenza, il parametro assume significato opposto, visto che le modalità rappresentate dai numeri più bassi esprimono i giudizi peggiori (e non le prime posizioni in graduatoria). È per questo che il modello CUB per l’analisi dei giudizi espressi su scale ordinali utilizza come parametro  $1 - \xi$ .

<sup>23</sup> Nel caso del modello CUB, in realtà, i singoli confronti appaiati non sono totalmente indipendenti tra loro, ma per semplicità vengono trattati come tali, visto che la somma di prove non indipendenti può essere approssimata dalla somma di prove indipendenti, e dunque dalla variabile casuale Binomiale (Iannario e Piccolo, 2016a).

ha che  $n = (m - 1)$ , mentre la probabilità di successo (tipicamente denominata  $p$ ) è data dalla probabilità<sup>24</sup> dell'alternativa  $r$  di prevalere in un confronto appaiato, pertanto, si ha che  $p = (1 - \xi)$ . Inoltre, quella su cui si fonda il modello CUB è una variabile casuale Binomiale particolare, in quanto essa risulta traslata sul suo supporto.

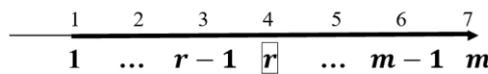
**X = v.c. Binomiale non traslata**



**Funzione di massa di probabilità =  $P(X = x) =$**   
 $\binom{m-1}{x} \cdot (1 - \xi)^x \cdot \xi^{(m-1)-x}$

Ad esempio:  $P(X = 3) = \binom{7-1}{3} \cdot (1 - \xi)^3 \cdot \xi^{(7-1)-3}$

**R = v.c. Binomiale traslata**



**Funzione di massa di probabilità =  $P(R = r) =$**   
 $\binom{m-1}{r-1} \cdot (1 - \xi)^{r-1} \cdot \xi^{(m-1)-(r-1)}$

Ad esempio:  $P(R = 4) = \binom{7-1}{4-1} \cdot (1 - \xi)^{4-1} \cdot \xi^{(7-1)-(4-1)} = \binom{7-1}{3} \cdot (1 - \xi)^3 \cdot \xi^{(7-1)-3} = P(X = 3)$

*Figura 2.1.* – Supporto e funzione di massa di probabilità di una variabile casuale Binomiale e di una variabile casuale Binomiale traslata in un caso con  $m = 7$ .

*Fonte:* Nostra elaborazione.

La variabile casuale  $X$  riportata nella Figura 2.1. rappresenta un esempio di Binomiale non traslata: la prima categoria corrisponde a “0”, mentre l’ultima a “ $m - 1$ ”, perciò in totale le categorie presenti sono  $m$ ; dunque, il supporto della v.c. è dato da  $x = \{0,1,2, \dots, m - 1\}$ .  $X$  rappresenta il numero ( $x$ ) di successi nelle  $m - 1$  prove e la sua funzione di massa di probabilità è quindi data da:  $f(x) = \binom{m-1}{x} \cdot (1 - \xi)^x \cdot \xi^{(m-1)-x}$ . Il modello CUB, però, si trova a operare con scale ordinali che hanno la prima alternativa di risposta corrispondente a “1” e, di conseguenza, l’ultima delle  $m$  alternative sarà proprio “ $m$ ”. Risulta quindi necessario che il supporto della v.c. venga traslato verso destra di un’unità, come nel caso della variabile  $R$  nella Figura 2.1, il cui supporto corrisponde a  $r = \{1,2, \dots, m - 1, m\}$ . Anche la Binomiale traslata  $R$  esprime il numero ( $r$ ) di volte in cui una certa alternativa prevale sulle  $r - 1$  categorie

<sup>24</sup> La formulazione originaria del modello CUB si basa sull’ipotesi che la probabilità di successo sia uguale per ciascuna delle categorie di risposta e per ognuno dei vari confronti appaiati che si verificano; in realtà, anche qualora si consideri che ogni confronto abbia probabilità diverse, il modello tiene conto di un unico valore dato dalla loro media (Iannario e Piccolo,2016a). Ipotizzando invece che la probabilità non sia sempre costante in tutti i confronti che costituiscono il processo decisionale, il modello è stato esteso (Piccolo e Simone, 2019), dando origine alla sua versione non lineare (NLCUB), secondo la quale la probabilità di passare da una categoria a quella immediatamente successiva non è necessariamente uguale in ogni punto della scala, come ipotizza il modello CUB originario – detto per questo lineare (Manisera e Zuccolotto, 2014a).

precedenti con cui viene confrontata. Questa v.c., dunque, esprime la probabilità che ciascuna categoria di risposta  $r$  ha di essere scelta, che è data dalla funzione di massa di probabilità di  $R$ , corrispondente a  $f(r) = \binom{m-1}{r-1} \cdot (1 - \xi)^{r-1} \cdot \xi^{m-1-(r-1)}$ .

La probabilità associata alla variabile casuale Binomiale traslata risulta quindi la seguente<sup>25</sup>:

$$P(R = r) = f(r) = \binom{m-1}{r-1} \cdot (1 - \xi)^{r-1} \cdot \xi^{m-r} \quad (2.1).$$

### 2.3.2. La v.c. Uniforme discreta

La componente di incertezza del processo psicologico di scelta della risposta su una scala ordinale, cioè l'elemento innovativo più rilevante introdotto dal CUB, può essere inserita nel modello utilizzando una variabile casuale Uniforme discreta. Tale distribuzione di probabilità è definita su un supporto che va da 1 a  $m$  e la sua funzione di massa di probabilità è data da  $f(r) = \frac{1}{m} \quad \forall r = 1, 2, \dots, m$ .

L'incertezza massima che può intervenire nel processo decisionale, infatti, si ha nel caso in cui nessuna delle alternative prevale sulle altre e cioè quando tutte le categorie di risposta hanno la medesima probabilità di essere scelte (Corduas, Iannario, Piccolo, 2009). Questo è ciò che si verifica quando vi è una percezione di *equipreferenza* tra le categorie (D'Elia e Piccolo, 2005), cioè una sorta di indifferenza generata da una scelta totalmente svincolata dalla valutazione attenta e ragionata del proprio livello di preferenza verso l'oggetto di indagine. L'incertezza massima si ha, dunque, quando questa componente prevale totalmente su quella di *feeling*. Questo significa che la distribuzione di probabilità della v.c. CUB corrisponde a quella della v.c. Uniforme, e quindi ogni categoria ha esattamente la stessa probabilità di essere scelta.

Questa è sicuramente una situazione estrema, però, inserendo nel modello la componente di piena incertezza e attribuendo a essa (e alla componente di *feeling*) un peso, è possibile ottenere una rappresentazione del processo di risposta alle scale ordinali, che tenga anche conto dei diversi elementi che possono distogliere da una risposta attentamente ponderata.

### 2.3.3. Funzione di massa di probabilità della v.c. CUB

La funzione che esprime la probabilità che ogni categoria ha di essere scelta dai rispondenti, durante il processo di risposta a una scala ordinale, è data dalla variabile casuale discreta CUB. Essa si ottiene dalla combinazione lineare della v.c. Binomiale traslata e della v.c. Uniforme

---

<sup>25</sup>  $\binom{m-1}{r-1}$  rappresenta il coefficiente binomiale, che è dato dal seguente calcolo:  $\frac{(m-1)!}{(r-1)!(m-1-(r-1))!} = \frac{(m-1)!}{(r-1)!(m-r)!}$

discreta, i cui pesi sono rappresentati, rispettivamente, dal parametro  $\pi$  e dal suo complemento a 1 (D'Elia e Piccolo, 2005). In particolare,  $\pi$  esprime il peso relativo della componente di *feeling*, mentre  $(1 - \pi)$  quello della componente di incertezza.

La funzione di massa di probabilità della variabile casuale CUB diventa quindi la seguente<sup>26</sup>:

$$P(R = r) = \pi \cdot \binom{m-1}{r-1} \cdot (1-\xi)^{r-1} \cdot (\xi)^{(m-r)} + (1-\pi) \cdot \frac{1}{m} \quad \text{per } r = 1, 2, \dots, m \quad (2.2).$$

Il fatto che il modello sia costituito da una mistura delle due variabili casuali che rappresentano le due componenti del processo psicologico, come anticipato, lascia spazio a due diverse interpretazioni equivalenti. La prima considera il parametro  $\pi$  come espressione della percentuale di soggetti che prendono una decisione non influenzata in alcun modo dall'incertezza; quindi, il suo complemento a 1 rappresenta la quota di rispondenti la cui scelta è totalmente incerta e quindi casuale (Piccolo e Simone, 2019). Nella seconda interpretazione, si considera invece che, per ognuno dei rispondenti, entrino in gioco entrambe le componenti; il parametro  $\pi$  può quindi essere visto come il peso relativo della componente di *feeling* rispetto a quella di incertezza. Tra le due visioni, la più realistica sembra essere la seconda, perché si può ritenere che la maggior parte dei processi decisionali derivi da entrambe le componenti, ciascuna con la propria importanza relativa a seconda dei casi.

Pertanto, l'obiettivo primario del modello CUB è quello di ottenere informazioni su come si atteggiavano le due componenti di *feeling* e di incertezza in ciascuna delle scale ordinali che vengono utilizzate per condurre una certa analisi. Il fatto che il modello individui una distribuzione di probabilità in grado di adattarsi ai dati osservati, più che per finalità previsionali, è particolarmente utile proprio per questo scopo di estrarre, dai dati, delle informazioni sul processo mentale che li ha generati. Questo è possibile mediante due soli parametri – garantendo quindi la parsimonia del modello (Piccolo, 2006) – ed è consentito dal fatto che, nella maggior parte dei casi, il modello presenta un livello soddisfacente di adattamento ai dati osservati, grazie alla flessibilità che gli è conferita dalla combinazione delle due variabili discrete, Uniforme e Binomiale traslata (Piccolo e Simone, 2019).

---

<sup>26</sup> Va precisato che, affinché il modello sia identificabile (Piccolo e Simone, 2019), è necessario che il numero di categorie di risposta presenti nella scala ordinale sia superiore a 3 ( $m > 3$ ). Ciò si deve al fatto che sono necessari due gradi di libertà per i parametri e uno ulteriore per garantire che la somma delle probabilità sia pari a 1 (Piccolo, 2003). Ad ogni modo, in genere, le scale di misurazione impiegate negli studi – per esempio quelle di tipo Likert – prevedono almeno 4 categorie e, anzi, le più comuni sono a quelle 5 e 7 alternative di risposta.

## 2.4. Il significato dei parametri

Due sono i parametri da cui dipende la variabile casuale CUB, ovvero  $\xi$  e  $\pi$ , i quali costituiscono lo spazio parametrico – bidimensionale – del modello; il numero di categorie presenti (indicato con  $m$ ) è invece un dato (D’Elia e Piccolo, 2005) che si osserva, di volta in volta, in base alla scala di misurazione che si desidera analizzare. Il parametro  $\xi$  è collegato alla componente di *feeling* e dunque alla Binomiale traslata; trattandosi della probabilità che una categoria non prevalga su un’altra durante il meccanismo dei confronti appaiati,  $\xi$  sarà un numero compreso tra 0 e 1, ossia  $\xi \in [0,1]$  (Piccolo e Simone, 2019). Il parametro  $\pi$  esprime, invece, il peso relativo della componente di *feeling* nel processo decisionale; anch’esso è un numero compreso tra 0 e 1 ma, a differenza di  $\xi$ , non è possibile che il parametro  $\pi$  sia esattamente pari a 0, ovvero  $\pi \in (0,1]$  (Piccolo e Simone, 2019). Questo significa che la componente di *feeling* può pesare molto poco nel processo decisionale di scelta della risposta, ma essa non può essere totalmente assente, altrimenti l’incertezza sarebbe massima per tutti i rispondenti, e questo significherebbe che la probabilità di ciascuna risposta di essere scelta sarebbe esattamente identica a quella di qualunque altra categoria.

L’interpretazione di questi due parametri, alla luce del loro legame con le due componenti del processo psicologico, può risultare più semplice se si prende in considerazione il complemento a 1 di  $\xi$  e  $\pi$ .

### 2.4.1. Il parametro $\xi$ e il *feeling*

Inizialmente il modello CUB è stato pensato per condurre analisi dei dati di tipo *ranking*, per questo il significato attribuito al parametro  $\xi$  si basava sul fatto che gli oggetti preferiti erano quelli che venivano collocati dai rispondenti nelle prime posizioni, rappresentate con i numeri più bassi. Quando, successivamente, l’impiego principale del modello è diventato l’analisi dei giudizi di preferenza, si è rivelato più opportuno interpretare il significato di  $1 - \xi$  (Piccolo e Simone, 2019).

Dal punto di vista del processo psicologico decisionale,  $(1 - \xi)$  rappresenta proprio il parametro di *feeling*, cioè esprime l’intensità della preferenza (o della percezione) che il rispondente manifesta nei confronti dell’oggetto di analisi (Piccolo e Simone, 2019). Infatti, nella distribuzione binomiale,  $(1 - \xi)$  corrisponde alla probabilità che, in ciascun confronto appaiato, l’alternativa di risposta  $r$  prevalga sull’altra con cui viene confrontata, ossia “abbia

successo” perché l’altra categoria è ritenuta insufficiente per rappresentare la preferenza. Quindi  $(1 - \xi)$  determina il numero di successi nelle  $m - 1$  prove bernoulliane – espresso dalla Binomiale traslata – e perciò impatta sul numero delle  $r - 1$  categorie sulle quali la modalità  $r$  riesce a prevalere perché le precedenti  $r - 1$  non son ritenute sufficienti per esprimere la percezione. Pertanto, al crescere di  $(1 - \xi)$  – e dunque al crescere della probabilità di successo – la percezione verso l’oggetto analizzato aumenta, ossia il *feeling* del rispondente (che, a seconda della domanda, può rappresentare la soddisfazione, l’importanza, il livello di accordo, ecc.) diventa via via più alto.

Dal punto di vista statistico il parametro di *feeling*  $(1 - \xi)$  impatta sulla forma della distribuzione CUB, e risulta essere sia un parametro di posizione che di asimmetria (Piccolo e Simone, 2019). La Figura 2.2. mostra i cambiamenti che la distribuzione della variabile casuale CUB subisce all’aumentare di  $\xi$ , ossia al diminuire del parametro di *feeling*.

Relativamente all’asimmetria, si nota che solo nel caso di  $\xi = 0,5$  – e quindi in presenza di un *feeling* intermedio, esattamente a metà tra i due estremi 0 e 1 – la distribuzione è simmetrica (Piccolo, 2006); nel caso in cui  $\xi$  sia inferiore o superiore al valore 0,5 essa sarà invece asimmetrica. In particolare, le probabilità nella parte destra della distribuzione saranno più elevate di quelle nella parte sinistra quando il *feeling* verso l’oggetto di analisi sarà elevato, ossia quando  $(1 - \xi)$  sarà alto, e cioè  $\xi$  tenderà a 0. Come mostrano chiaramente i primi grafici riportati in Figura 2.2, in questa situazione sono le modalità di risposta più alte – corrispondenti ai giudizi più elevati – ad avere la maggiore probabilità di verificarsi. Questo si deve al fatto che  $(1 - \xi)$  esprime proprio la probabilità che una categoria di risposta  $r$  “abbia successo” sulle altre con cui viene confrontata, nel senso che sia ritenuta migliore delle altre perché queste non sono sufficientemente forti a rappresentare la preferenza del rispondente. Questo a sua volta significa che la percezione verso l’oggetto è molto forte – e positiva – quindi deve essere espressa da una delle categorie più elevate che, secondo il modello, saranno per l’appunto quelle con la maggiore probabilità di essere scelte.

Al contrario, quando  $(1 - \xi)$  è inferiore a 0,5 sono le categorie che esprimono le preferenze più basse ad avere la maggiore probabilità di essere scelte, quindi le probabilità più elevate si troveranno nella parte sinistra della distribuzione, che sarà perciò più alta di quella destra, come mostrano gli ultimi grafici riportati in Figura 2.2.

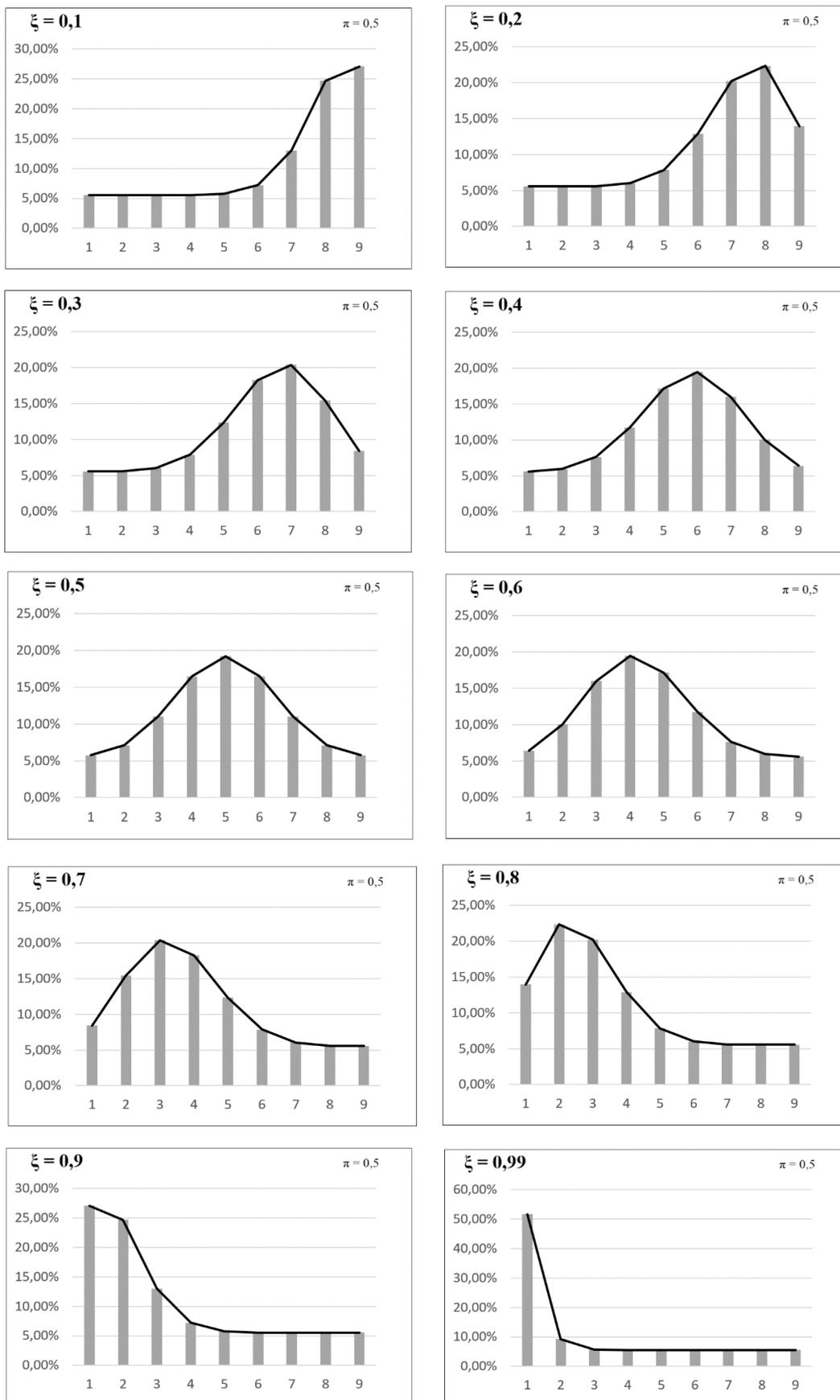


Figura 2.2. – Andamento della v.c. CUB al variare del parametro  $\xi$ .  
 Fonte: Adattamento da D'Elia e Piccolo, 2005.

Oltre a dare queste informazioni sull'asimmetria, la Figura 2.2 mostra che il parametro  $\xi$  funge anche da indicatore di posizione. Osservando la moda – l'indice statistico di posizione che è rappresentato dalla modalità che si presenta con la frequenza più alta (Cicchitelli, D'Urso, Minozzo, 2017, p. 126) – si nota che la sua collocazione dipende dal parametro  $\xi$ . Più precisamente, quando il *feeling* è elevato (cioè quando  $(1 - \xi)$  è alto e, dunque,  $\xi$  è basso), la moda si colloca in una delle categorie che esprimono una preferenza più elevata. Al contrario, quando il *feeling* verso l'oggetto di indagine è basso (e dunque  $\xi$  è alto), la moda si colloca in una delle modalità di risposta corrispondenti a preferenze poco intense.

Quanto appena osservato nella rappresentazione grafica della variabile casuale CUB trova anche un riscontro algebrico quando vengono calcolati i principali momenti della distribuzione. È tuttavia da precisare che quest'ultima rappresenta la manifestazione di una percezione o di una preferenza attraverso una scala ordinale: gli indicatori che possono essere calcolati per la v.c. sono quindi solo un'approssimazione dei dati di natura qualitativa che essa racchiude (Piccolo, 2006). Per quanto riguarda ad esempio la media – ossia il valore atteso della v.c. CUB – è possibile calcolarla ma è sconsigliabile impiegarla per sintetizzare i dati raccolti; essa, però, può essere utile per comprendere l'effetto dei diversi valori assunti dai parametri sulla forma della distribuzione. Piccolo (2003) ha individuato che la formula del valore atteso per la v.c. CUB è data da:  $E(CUB) = \pi(m - 1) \left( \frac{1}{2} - \xi \right) + \frac{m+1}{2}$ .

Come si può notare, il parametro  $\xi$  entra nella formula con segno negativo e quindi all'aumentare di  $\xi$  la media tende a diminuire, e dunque anche la moda tenderà a essere posizionata in corrispondenza delle prime categorie, le più basse. La formula dà anche riscontro di quanto appena esposto in merito all'asimmetria: se  $\xi$  è pari a  $\frac{1}{2}$ , la media sarà localizzata in corrispondenza della categoria centrale – o tra le due categorie centrali se presenti in numero pari – denotando quindi simmetria (D'Elia e Piccolo, 2005). Per  $\xi$  inferiore a  $\frac{1}{2}$  il primo addendo della formula avrà segno positivo e dunque la media si troverà a destra della modalità centrale; per valori superiori a  $\frac{1}{2}$  il segno sarà negativo e quindi la media sarà nella parte sinistra.

#### **2.4.2. Il parametro $\pi$ e l'incertezza**

Nella funzione di probabilità, il parametro  $\pi$  moltiplica l'elemento che rappresenta la scelta razionale e soppesata, espresso dalla Binomiale traslata (che dipende dal parametro di *feeling*); il suo complemento a 1 moltiplica invece l'Uniforme discreta, rappresentativa della

componente di incertezza nel processo decisionale.  $(1 - \pi)$  rappresenta quindi il parametro di incertezza del modello CUB (D’Elia e Piccolo, 2005): più esso aumenta (cioè più  $\pi$  diminuisce), e più l’incertezza nella scelta della categoria di una scala ordinale risulta alta. Per questo motivo, quando il parametro di incertezza è molto elevato (e dunque  $\pi$  tende a 0), la v.c. CUB approssima la distribuzione Uniforme (come mostra il primo grafico in Figura 2.3.), in cui ogni categoria ha all’incirca la medesima probabilità di ciascun’altra di essere scelta (D’Elia e Piccolo, 2005). Al contrario, quando il parametro di incertezza è molto basso (quando  $\pi$  tende a 1), la distribuzione si comporta praticamente come una Binomiale (D’Elia e Piccolo, 2005) traslata di un’unità sul suo supporto (come mostra l’ultimo grafico in Figura 2.3.).

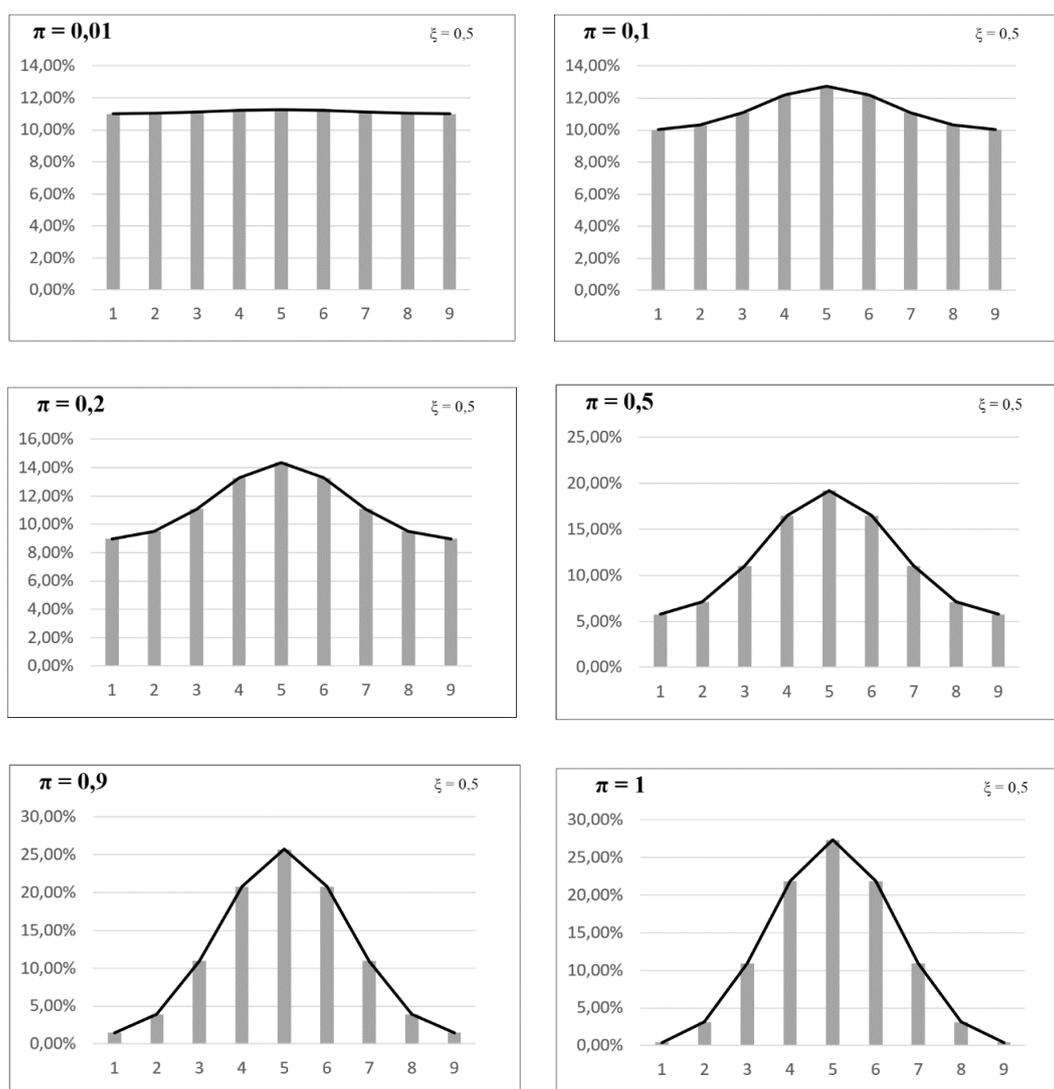


Figura 2.3. – Andamento della v.c. CUB al variare del parametro  $\pi$ .  
 Fonte: Adattamento da D’Elia e Piccolo, 2005.

La Figura 2.3. rappresenta vari valori di  $\pi$ , ipotizzando un valore del parametro di *feeling* pari a 0,5 ( $\xi = (1 - \xi) = 0,5$ ), che determina la posizione e la simmetria della distribuzione, la quale assume quindi una forma “a campana”; prendendo valori diversi del parametro  $\xi$ , l’andamento della distribuzione sarebbe diverso, ma l’effetto di  $\pi$  su di essa sarebbe il medesimo che si osserva in Figura. In particolare, il parametro  $\pi$  impatta sulla forma della distribuzione, rendendola più o meno “piatta” (Piccolo e Simone, 2019): quando l’incertezza rappresentata da  $1 - \pi$  è alta (cioè  $\pi$  è basso), la v.c. CUB sarà molto piatta; quindi, sull’andamento tipico della Binomiale prevale la forma della v.c. Uniforme. A bassi livelli di incertezza (quando  $\pi$  è alto), invece, corrisponde una distribuzione molto meno piatta, le cui code saranno più basse (D’Elia e Piccolo, 2005): le categorie corrispondenti alla componente di *feeling* avranno quindi una probabilità di essere scelte molto più alta rispetto alle altre, perché l’incertezza soggettiva è contenuta, il che consente di esprimere accuratamente la propria percezione mediante una scelta ben ponderata.

L’incertezza tende quindi ad “appiattare” la distribuzione, alzandone le code e rendendo meno evidente il suo picco, corrispondente alla moda. Ciò deriva dal fatto che, essendo modellata attraverso una v.c. Uniforme (discreta), l’incertezza impatta in egual misura sulla probabilità associata a ognuna delle categorie, impattando maggiormente – in termini relativi – sulle modalità con le probabilità più basse rispetto a quelle con probabilità più elevate, che vengono pur sempre ridotte, ma in modo relativamente più contenuto.

L’incertezza si distribuisce in misura uguale su ciascuna delle alternative di risposta; può quindi essere utile calcolare il valore della cosiddetta “quota di incertezza” (D’Elia e Piccolo, 2005). Questa misura di incertezza distribuita sull’intero supporto si ottiene rapportando il parametro di incertezza ( $1 - \pi$ ) al numero complessivo di categorie ( $m$ ); essa corrisponde al secondo addendo della funzione di massa di probabilità della v.c. CUB, ossia  $(1 - \pi) \cdot \frac{1}{m} = \frac{1-\pi}{m}$ .

## 2.5. La stima dei parametri

Il modello CUB, una volta che viene fornito in input un vettore contenente  $n$  risposte a una scala di misurazione ordinale, è in grado di stimare il valore dei due parametri  $\pi$  e  $\xi$  (Tomaselli, Cantone, D’Agata, 2020) legati, rispettivamente, alla componente di incertezza e a quella di *feeling*. L’output del modello è rappresentato dal vettore dei parametri stimati, che può essere indicato con  $\hat{\theta} = [\hat{\pi}, \hat{\xi}]'$  (D’Elia e Piccolo, 2005).

### 2.5.1. Metodo della massima verosimiglianza

I valori dei parametri che, una volta inseriti nella variabile casuale CUB, permettono di approssimare al meglio i dati osservati vengono stimati mediante tecniche di inferenza statistica, e in particolare attraverso il metodo della massima verosimiglianza (*maximum likelihood*, in inglese).<sup>27</sup> Si tratta di una metodologia che viene impiegata per effettuare la stima puntuale dei parametri di molte distribuzioni di probabilità, essendo un metodo molto robusto e rigoroso dal punto di vista matematico (Kumar, 2017, p. 115). L'obiettivo di questo metodo è quello di individuare i valori da assegnare ai parametri di una distribuzione in modo che la funzione di verosimiglianza rispetto ai dati osservati sia massima (Kumar, 2017, p. 115).

Quando, dato un certo modello, si vuole inferire un parametro della popolazione a partire da un campione di  $n$  unità  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , estratto casualmente dalla popolazione, si procede a determinare la funzione di verosimiglianza (Samui et al., 2020, p. 275). Tale funzione è espressa al variare del parametro  $\theta$ , condizionalmente al campione estratto; quindi, per ogni valore del parametro  $\theta$ , essa esprime quanto tale valore è verosimile, dato il campione osservato. La stima puntuale mediante il metodo della massima verosimiglianza mira quindi a determinare quel valore del parametro (o del vettore di parametri)  $\hat{\theta}$  che massimizza la funzione di verosimiglianza, ossia il valore che più verosimilmente può aver generato il particolare campione osservato.

In termini formali, quindi, la funzione di verosimiglianza può essere vista come una distribuzione di probabilità composta (Samui et al., 2020, p. 275), perché esprime la probabilità che più eventi si verifichino contemporaneamente. In particolare, si calcola la probabilità congiunta di estrarre la prima ( $x_1$ ) e la seconda ( $x_2$ ) e la terza ( $x_3$ ) e così via fino all' $n$ -esima unità campionaria ( $x_n$ ). Pertanto – poiché si assume che le unità vengano estratte casualmente e in modo indipendente – la funzione di verosimiglianza è rappresentata dalla produttoria – per ognuna delle unità campionarie – delle distribuzioni di probabilità associate a ogni singola unità estratta.<sup>28</sup> Si tratta di una funzione del parametro  $\theta$ , che rappresenta l'incognita da trovare al fine di rendere massimo il valore della funzione  $L$  di verosimiglianza; al contrario, i dati osservati non sono delle variabili ma vengono presi come dati di partenza per la stima di  $\hat{\theta}$ .

---

<sup>27</sup> Il metodo consente di ottenere uno stimatore, spesso abbreviato come MLE (*Maximum Likelihood Estimator*), che gode di proprietà che consentono di fare inferenza sui parametri della popolazione (Samui et al., 2020, p. 276).

<sup>28</sup> Quanto descritto vale nel caso in cui i campioni possano essere considerati delle variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite, cioè che abbiano la medesima funzione di probabilità, che nella successiva formula viene indicata come  $f(x)$ .

La formula che esprime la funzione di verosimiglianza è la seguente:

$$L = L(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}|x_i) = \prod_{i=1}^n p(x_i|\boldsymbol{\theta}) \quad (2.3).$$

Una volta definita la funzione di verosimiglianza, essa può essere impiegata per valutare, tra diversi valori di  $\boldsymbol{\theta}$ , quale sia quello ottimale da associare al parametro per far sì che la verosimiglianza sia massima (Samui et al., 2020, p. 275). In questo modo è possibile individuare quel valore  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  per il quale è più probabile ottenere il campione osservato, a partire dalla distribuzione di probabilità associata al modello (Casella e Berger, 2002, p. 316).

Generalmente, anziché lavorare direttamente con la funzione di verosimiglianza, risulta più conveniente calcolare il suo logaritmo naturale (Kumar, 2017, p. 115), costruendo la funzione di log-verosimiglianza:  $\ell(\boldsymbol{\theta}) = \log(L(\boldsymbol{\theta}))$ . Per le proprietà dei logaritmi<sup>29</sup>, il logaritmo della distribuzione di probabilità composta (rappresentata dalla produttoria) corrisponde alla sommatoria dei logaritmi delle probabilità di ottenere ciascuna delle unità campionarie osservate.

La funzione di log-verosimiglianza, in cui  $\log(\cdot)$  indica il logaritmo naturale, è quindi data da:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \log(L(\boldsymbol{\theta})) = \log\left(\prod_{i=1}^n p(x_i|\boldsymbol{\theta})\right) = \sum_{i=1}^n \log(p(x_i|\boldsymbol{\theta})) \quad (2.4).$$

Nel caso del modello CUB,  $\boldsymbol{\theta}$  rappresenta il vettore dei due parametri  $\pi$  e  $\xi$  che vengono fatti variare in modo da individuare quei valori  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\pi}, \hat{\xi}]'$  che massimizzano la funzione di verosimiglianza del modello, e dunque che rendono massima la probabilità di ottenere la distribuzione di frequenze relativa al campione osservato.

È possibile considerare che i dati osservati, cioè le  $n$  risposte fornite a una scala ordinale  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  che costituiscono il campione complessivo, possano essere suddivisi in  $m$  “sottocampioni” (uno per ogni alternativa di risposta  $r = \{1, 2, \dots, m\}$ ), ognuno dei quali include gli  $n_r$  soggetti che hanno fornito tutti la stessa risposta ( $r$ ). Per esempio, le risposte di tutte le persone che hanno scelto la prima alternativa costituiranno il primo “sottocampione”, che conterrà  $n_1$  elementi; l’ultimo “sottocampione”, invece, includerà le risposte fornite dagli  $n_m$  soggetti che hanno scelto l’ultima alternativa di risposta “ $m$ ”.

La funzione di verosimiglianza del modello CUB ( $L_{CUB}(\boldsymbol{\theta})$ ) dovrà esprimere la probabilità che la v.c. data dalla combinazione dell’Uniforme e della Binomiale traslata possa generare

---

<sup>29</sup> Si ha infatti che  $\log(m \cdot n) = \log(m) + \log(n)$ ; se il logaritmo del prodotto corrisponde alla somma dei logaritmi, allora il logaritmo di una produttoria equivale alla sommatoria dei logaritmi dei singoli elementi.

esattamente gli  $m$  “sottocampioni”, cioè che permetta di rappresentare sia  $n_1$  risposte pari alla prima modalità della scala (dunque pari a 1), sia  $n_2$  risposte pari a 2, sia  $n_r$  risposte pari a  $r$ , e così via fino a  $n_m$  risposte pari all’ultima alternativa di risposta ( $m$ ). Per il teorema delle probabilità composte, questa funzione  $L_{CUB}$  sarà quindi data dalla produttoria – per  $r$  che va da 1 a  $m$  – delle probabilità associate a ogni categoria  $r$  (esprese dalla v.c. CUB), elevate<sup>30</sup> per  $n_r$ , che rappresenta il numero di volte in cui l’alternativa  $r$  è stata effettivamente scelta dai rispondenti. La funzione di verosimiglianza del modello CUB è quindi la distribuzione di probabilità composta data dalla seguente formula:

$$L_{CUB}(\theta) = \prod_{r=1}^m p(x_r|\theta) = \prod_{r=1}^m [P_{CUB}(R = r|\theta)]^{n_r} \quad (2.5),$$

dove  $P_{CUB}(R = r) = \pi \binom{m-1}{r-1} (1 - \xi)^{r-1} (\xi)^{m-r} + \frac{(1-\pi)}{m}$ , come riportato nell’equazione (2.2).

Anche in questo caso risulta più agevole calcolare la funzione di log-verosimiglianza che quindi corrisponderà alla sommatoria – per  $r$  che va da 1 a  $m$  – del logaritmo naturale della probabilità di ottenere una risposta pari a  $r$ , moltiplicato<sup>31</sup> per la frequenza assoluta  $n_r$ . Pertanto, la funzione di log-verosimiglianza per il modello CUB che non preveda *covariate* (Piccolo, 2006) è rappresentata dalla seguente equazione:

$$\ell_{CUB}(\theta) = \log(L(\theta)) = \log\left(\prod_{r=1}^m [P_{CUB}(R = r|\theta)]^{n_r}\right) = \sum_{r=1}^m [n_r \cdot \log(P_{CUB}(R = r|\theta))] \quad (2.6). \quad 32$$

Il modello CUB cercherà di individuare quei valori ottimali dei parametri  $\pi$  e  $\xi$  rientranti nello spazio parametrico  $\Omega = \{ \pi, \xi : \pi \in (0,1], \xi \in [0,1] \}$ , che costituiranno il vettore dei parametri stimati  $\hat{\theta} = [\hat{\pi}, \hat{\xi}]'$  in grado di rendere massima la funzione di log-verosimiglianza e, di

<sup>30</sup> La probabilità di estrarre un “sottocampione” che contenga  $n_r$  risposte tutte pari a  $r$  è infatti data dal prodotto della probabilità di ottenere una volta la risposta  $r$  moltiplicata per se stessa  $n_r$  volte, ossia elevata alla  $n_r$ .

<sup>31</sup> Per le proprietà dei logaritmi, infatti, si ha che:  $\log(m^n) = n \cdot \log(m)$ .

<sup>32</sup> La formula (2.6) risulta equivalente alla formula (2.4), a partire dalla quale può essere ricavata scrivendo per esteso la sommatoria (2.4) e raggruppando le risposte che sono ricadute sulla medesima categoria. Infatti, si ha che:

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^n \log(p(x_i|\theta)) = \sum_{i=1}^n \log(P(R = x_i|\theta)) = \log(P(R = 1|\theta)) + \dots + \log(P(R = 1|\theta)) + \log(P(R = 2|\theta)) + \dots + \log(P(R = 2|\theta)) + \dots + \log(P(R = r|\theta)) + \dots + \log(P(R = r|\theta)) + \dots + \log(P(R = m|\theta)) + \dots + \log(P(R = m|\theta)).$$

La risposta  $x_i$  di ciascuno degli  $n$  rispondenti potrà ricadere su un numero limitato (e pari a  $m$ ) di alternative di risposta (cioè quelle che compongono la scala ordinale); perciò, sarà possibile sommare tra loro tutte le probabilità relative a quelle risposte  $x_i$  che sono ricadute sulla medesima categoria  $r$ , le quali si presenteranno con una frequenza pari a  $n_r$ . Si avrà quindi che:  $\ell(\theta) = \log(P(R = 1|\theta)) \cdot n_1 + \log(P(R = 2|\theta)) \cdot n_2 + \dots + \log(P(R = r|\theta)) \cdot n_r + \dots + \log(P(R = m|\theta)) \cdot n_m$ .

A questo punto, sarà possibile esprimere nuovamente la funzione di log-verosimiglianza come una sommatoria, il cui indice non farà più riferimento al rispondente ( $i$ -esimo) che ha formulato la risposta ( $x_i$ ), ma si riferirà all’alternativa di risposta della scala ordinale ( $r$ ); si avrà quindi che:  $\ell(\theta) = \sum_{r=1}^m [n_r \cdot \log(P(R = r|\theta))] = \sum_{r=1}^m [n_r \cdot \log(p(r|\theta))]$ .

In questo modo, la funzione di log-verosimiglianza risulterà di più facile gestione dal punto di vista computazionale (D’Elia e Piccolo, 2005), trattandosi di una sommatoria di soli  $m$  termini (pari al numero delle alternative della scala di risposta, tipicamente 5 o 7), a differenza della formula alternativa (2.4), nella quale il numero di addendi corrisponderà al numero di rispondenti al questionario (che può essere nell’ordine delle centinaia se non delle migliaia).

conseguenza, anche quella di verosimiglianza, dato che la prima deriva da una trasformazione monotona – in particolare, logaritmica – della seconda (Hogg, McKean, Craig, 2019, p. 355). Per massimizzare la funzione di log-verosimiglianza si possono utilizzare diversi metodi; tra questi, è stato dimostrato che l’algoritmo EM consente di ottenere dei risultati affidabili, a fronte, però, di una maggiore lentezza dal punto di vista computazionale rispetto ai metodi alternativi.

### **2.5.2. Algoritmo EM per la stima di massima verosimiglianza**

La stima puntuale dei parametri tramite il metodo della massima verosimiglianza può essere effettuata, per le distribuzioni di probabilità più semplici, anche in termini algebrici, individuando i punti stazionari della funzione di verosimiglianza e, tra questi, quello di massimo (Casella e Berger, 2002, p. 316). Tuttavia, nel caso del modello CUB – come in molti altri modelli statistici in cui la funzione di verosimiglianza è complessa (Watanabe e Yamaguchi, 2014, p. 67) – è necessario stimare i parametri con metodi numerici; in particolare si può impiegare l’algoritmo che prende il nome di *Expectation Maximization*, spesso abbreviato con “EM”.

Si tratta di un algoritmo iterativo che permette di determinare gli stimatori di massima verosimiglianza (Dempster, Laird, Rubin, 1977) e che viene utilizzato per l’inferenza dei parametri di molti modelli mistura (D’Elia e Piccolo, 2005). Il nome dell’algoritmo (Dempster, Laird, Rubin, 1977) deriva dal fatto che, in ogni iterazione, si assiste a una fase in cui viene calcolato il valore atteso (*expectation*) della funzione di log-verosimiglianza (completa), a cui segue la fase di massimizzazione di tale funzione (*maximization*), per ottenere la stima (provvisoria) dei parametri (D’Elia e Piccolo, 2005).

Tra i possibili metodi numerici per la stima dei parametri in base al metodo della massima verosimiglianza, l’algoritmo EM è frequentemente utilizzato, soprattutto quando la funzione da massimizzare risulta piuttosto complessa. In queste situazioni, infatti, altri metodi potrebbero non riuscire a individuare il punto di massimo assoluto, fermandosi in presenza di un massimo locale, spesso localizzato vicino agli estremi dello spazio parametrico, (Manisera e Zuccolotto, 2017), determinando così dei parametri in corrispondenza di tale punto, con il rischio che questi siano molto diversi da quelli che permettono di raggiungere il massimo assoluto della funzione. L’algoritmo EM, infatti, è un metodo tendenzialmente stabile – ossia in grado di individuare il punto di massimo assoluto della funzione – e meno influenzato dal valore iniziale associato ai parametri, pertanto, i suoi risultati possono essere considerati più affidabili di quelli ottenuti

con altri metodi (Manisera e Zuccolotto, 2017). Ciò avviene a scapito della velocità di convergenza dell' algoritmo, che richiede un numero più elevato di iterazioni rispetto ai metodi alternativi (Watanabe e Yamaguchi, 2014, p. 67). Questo è un problema computazionale che diventa molto rilevante quando si ha a che fare con una grande mole di dati da analizzare, perché per ottenere risultati stabili e affidabili mediante l' algoritmo EM servirà diverso tempo (Watanabe e Yamaguchi, 2014, p. 67).

L' algoritmo EM è pensato per stimare i parametri nel caso in cui i dati possano essere considerati come incompleti, ossia quando soltanto una parte di essi può essere direttamente osservata, mentre esistono degli elementi mancanti o comunque non direttamente osservabili, come ad esempio i parametri ignoti di un modello probabilistico (Dempster, Laird, Rubin, 1977). Per questa ragione l' algoritmo è largamente utilizzato nei modelli a variabili latenti, perché gli aspetti che si vogliono indagare non sono direttamente osservabili, ma possono essere stimati sulla base dei valori osservati tramite le variabili manifeste (Watanabe e Yamaguchi, 2014, p. 67). I dati mancanti vengono sostituiti con le stime provvisorie ottenute dall' algoritmo EM, che vengono aggiornate a ogni iterazione (Watanabe e Yamaguchi, 2014, p. 67) finché l' algoritmo non converge, portando alla stima definitiva dei parametri rappresentativi delle variabili latenti che si desidera indagare.

Nel caso specifico del modello CUB, le variabili latenti di interesse sono le due componenti di *feeling* e incertezza che costituiscono il processo mentale di risposta a una domanda volta a indagare – tramite una scala ordinale – la preferenza o la percezione del rispondente. I parametri rappresentativi delle due componenti latenti –  $\xi$  legato al *feeling* e  $\pi$  all' incertezza – possono essere stimati iterativamente tramite l' algoritmo EM, considerandoli come dati mancanti, in quanto non manifesti (Piccolo e Simone, 2019). I dati forniti in input al modello CUB – ossia le  $n$  risposte osservate – possono essere considerati incompleti perché vi è un elemento ignoto e quindi mancante (D'Elia e Piccolo, 2005): non si sa quale delle due componenti latenti abbia generato quella specifica risposta, se una decisione attenta e ponderata o se una scelta incerta e casuale.<sup>33</sup> Per questo motivo è possibile ricorrere all' algoritmo EM, pensato proprio per i casi di

---

<sup>33</sup> Considerare che una risposta derivi, in via esclusiva, dalla componente di *feeling* o da quella di incertezza è una possibile interpretazione consentita dal modello mistura CUB (D'Elia e Piccolo, 2005). Del tutto analoga è l' interpretazione che considera invece che, per ciascuna delle risposte fornite, entrino in gioco entrambe le componenti latenti, ognuna con un determinato peso.

dati incompleti, perché mancanti (*missing values*) o perché latenti (non direttamente osservabili), come in questo caso (Dempster, Laird, Rubin, 1977).

Questa informazione mancante è tipica di molti modelli mistura, nei quali, infatti, l'algoritmo EM viene frequentemente impiegato per la stima dei parametri (Dempster, Laird, Rubin, 1977). In questi casi, si può considerare di introdurre una variabile – anch'essa latente (D'Elia e Piccolo, 2005) e spesso indicata con  $z$  – che fornisca l'informazione in merito a quale distribuzione ( $d$ ), tra quelle che formano il modello mistura, abbia determinato una certa risposta ( $i$ ), in base al valore assunto da  $z$  per la specifica risposta  $i$  – ossia  $z_{d,i}$ . In particolare, per ciascuna risposta osservata  $i$ , ci saranno due valori di  $z_{d,i}$  (uno relativo alla Binomiale e l'altro relativo all'Uniforme): considerando che ogni risposta dipende esclusivamente da una delle due componenti latenti, uno di tali valori sarà sempre 0 e l'altro – relativo alla componente che ha generato la risposta – sarà pari a 1 (D'Elia e Piccolo, 2005).<sup>34</sup>

Prendendo in considerazione anche questa variabile  $z$ , oltre ai dati osservati e al vettore dei parametri  $\theta$ , è possibile costruire la funzione di log-verosimiglianza completa del modello CUB (D'Elia e Piccolo, 2005). Per ogni risposta  $i$ , tale funzione è data dalla somma di due addendi, uno dei quali sarà sempre pari a 0, in corrispondenza di quella componente che non ha determinato tale risposta. La funzione di log-verosimiglianza completa risulta la seguente:

$$\ell_C(\theta) = \log(L_C(\theta)) = \sum_{i=1}^n \{z_{Bin,i} [\log(\pi \cdot P_{Bin}(x_i; \xi))] + z_{U,i} [\log((1 - \pi) \cdot P_U(m))]\} \quad (2.7).^{35}$$

Sarà questa la funzione sottoposta alle fasi di *expectation* e di *maximization* all'interno dell'algoritmo EM, grazie alle quali sarà possibile ottenere, dopo un certo numero di iterazioni, la stima di massima verosimiglianza dei parametri del modello CUB.

---

<sup>34</sup> D'Elia e Piccolo (2005), per esempio, nell'ambito del modello CUB, considerano la distribuzione Binomiale come  $d = 1$ , e l'Uniforme come  $d = 2$ ; quando  $z_{1,i} = 1$  significa che la risposta  $i$  deriva dalla distribuzione Binomiale (traslata), ossia dalla componente di *feeling*, e, al contrario  $z_{2,i} = 1$  indica che la risposta discende dalla componente di incertezza, e cioè dalla distribuzione Uniforme discreta. Più in generale,  $z$  può essere considerata come una matrice di soli valori binari  $\{0, 1\}$ , le cui dimensioni sono date dal numero  $n$  di risposte raccolte e dal numero di distribuzioni che costituiscono il modello mistura; per ogni risposta, l'unico valore pari a 1 corrisponderà alla distribuzione  $d$  che ha determinato quella risposta  $i$  (Dempster, Laird, Rubin, 1977).

<sup>35</sup> La formula (2.7) può essere costruita a partire dalla formula (2.4) della funzione di log-verosimiglianza del modello CUB, espressa come sommatoria, per ognuno degli  $n$  rispondenti a un questionario, delle probabilità associate a ciascuna risposta. Per meglio comprendere la relazione con la funzione di log-verosimiglianza completa associata al modello CUB, può essere utile riscrivere la formula (2.4) nel modo di seguito riportato:

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^n [\log(p(r|\theta))] = \sum_{i=1}^n [\log(P(R = r|\theta))] = \sum_{i=1}^n [\log(P(R = x_i|\pi, \xi))] = \sum_{i=1}^n [\log(\pi \cdot P_{Bin}(x; \xi) + (1 - \pi) \cdot P_U(m))].$$

### 2.5.3. Funzionamento dell'algoritmo EM per il modello CUB

L'algoritmo EM prevede che, dopo aver assegnato dei valori iniziali ai parametri, venga eseguita iterativamente una sequenza di passi per individuare il vettore dei parametri in grado di massimizzare la funzione di log-verosimiglianza. A ogni iterazione (che può essere indicata con  $k$ ), dopo una fase in cui viene calcolato il valore atteso – *Expectation* – della funzione di log-verosimiglianza completa, e a seguito della sua massimizzazione – *Maximization* – (Piccolo e Simone, 2019), vengono determinati due parametri provvisori del modello CUB<sup>36</sup>, cioè  $\pi_{k+1}$  e  $\xi_{k+1}$ . Questi ultimi verranno impiegati nelle fasi E-M dell'iterazione successiva (che è, per l'appunto, l'iterazione numero  $k + 1$ ), per individuare un'altra coppia di parametri provvisori.

L'algoritmo termina, e quindi non passa all'iterazione successiva, quando si verifica la convergenza, ossia la funzione di verosimiglianza non migliora o migliora in misura inferiore a una soglia di tolleranza, indicata da un valore  $\varepsilon$ , piccolo e positivo, che potrebbe ad esempio essere considerato pari a  $10^{-6}$  (Piccolo, 2006), oppure a  $10^{-10}$  (D'Elia e Piccolo, 2005). Gli ultimi valori di  $\pi$  e  $\xi$  determinati dall'algoritmo EM nella sua ultima iterazione vengono considerati come la stima, in base al metodo della massima verosimiglianza, dei parametri del modello CUB (Piccolo, 2006), e costituiscono quindi il vettore dei parametri stimati  $\hat{\theta} = [\hat{\pi}, \hat{\xi}]'$ . Per poter iniziare a eseguire la prima iterazione, l'algoritmo richiede che venga indicato il valore iniziale dei parametri. Può essere conveniente assegnare al parametro  $\pi$  il valore iniziale di 0,5; al parametro  $\xi$  può essere invece assegnato il valore  $\frac{m - \bar{R}_n}{m - 1}$ , dove  $\bar{R}_n$  indica il valore medio delle  $n$  risposte osservate (D'Elia e Piccolo, 2005). Sulla base di questi parametri iniziali, potrà essere calcolato il valore di partenza della funzione di log-verosimiglianza, con il quale verrà confrontato il valore di tale funzione in corrispondenza dei nuovi parametri determinati nella prima iterazione dell'algoritmo EM (Piccolo, 2006). Quest'ultimo inizierà quindi a eseguire ripetutamente una serie prefissata di passi, fino alla convergenza.

La prima operazione eseguita in ciascuna iterazione (Piccolo, 2006) consiste nel calcolo – per ciascuna delle categorie di risposta  $r$  – di  $P_{Bin}(r, \xi_k)$ , ossia della probabilità derivante dalla variabile casuale Binomiale traslata, ottenuta sulla base dell'ultimo valore del parametro  $\xi_k$  determinato dall'algoritmo (o, nel caso della prima iterazione, in base al valore iniziale assegnato).

---

<sup>36</sup> L'algoritmo EM presentato di seguito è relativo al caso del CUB senza *covariate* (D'Elia e Piccolo, 2005).

Il passo successivo consiste nel calcolo della probabilità che ognuna delle alternative di risposta ( $r$ ) ha di essere determinata dalla componente di *feeling*, e dunque di derivare dalla v.c. Binomiale traslata del modello CUB (Piccolo, 2006). Questa probabilità (a posteriori) può essere indicata con  $\tau_{r|\theta_k}$  (D'Elia e Piccolo, 2006) ed è data, per la singola categoria di risposta  $r$ , dal quoziente tra la probabilità associata alla Binomiale traslata (moltiplicata per il rispettivo peso  $\pi_k$ ) e la probabilità derivante dalla variabile CUB (ossia la somma pesata della Binomiale traslata e dell'Uniforme discreta). Si ha quindi che:

$$\tau_{r|\theta_k} = \frac{\pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k)}{P_{CUB}} = \frac{\pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k)}{\pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k) + \frac{1 - \pi_k}{m}} = \frac{\pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k)}{\pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k) + (1 - \pi_k) \cdot \frac{1}{m}} \quad . \quad 37$$

La formula di  $\tau_{r|\theta_k}$  esprime quanta parte del denominatore, cioè della probabilità derivante dal modello CUB (e dunque la somma pesata della Binomiale traslata e dell'Uniforme discreta), deriva dal numeratore, ossia dalla probabilità derivante dalla sola variabile casuale Binomiale, pesata per il parametro  $\pi$ ; si tratta quindi della probabilità che la categoria di risposta  $r$  venga scelta, nel processo decisionale, per merito della componente di *feeling*.

Una volta calcolata questa probabilità, è possibile individuare il valore del parametro  $\pi_{k+1}$  da impiegare nell'iterazione successiva (D'Elia e Piccolo, 2005). Nella distribuzione CUB, infatti,  $\pi$  rappresenta il peso associato alla v.c. Binomiale traslata (cioè alla componente di *feeling*) e, dunque, più il suo valore aumenta, maggiore sarà la probabilità che la scelta di una certa categoria  $r$  sia frutto di una decisione attenta e ponderata. Il modello contiene un unico valore del parametro  $\pi$ , che può essere calcolato come media ponderata dei  $\tau_r$  (cioè delle probabilità che le diverse categorie  $r$  hanno di derivare dalla componente di *feeling*), utilizzando come pesi le frequenze assolute di ogni categoria ( $n_r$ ), (Piccolo, 2006).

Si ha quindi che  $\pi_{k+1} = \frac{\sum_{r=1}^m n_r \cdot \tau_{r|\theta_k}}{n}$ , dove  $n = \sum_{r=1}^m n_r$  è il numero totale di risposte.

---

<sup>37</sup> Il valore di  $\tau$  può anche essere calcolato (Piccolo, 2006) per ogni categoria  $r$  tramite la formula  $\tau = \left[1 + \frac{1 - \pi_k}{m \cdot \pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k)}\right]^{-1}$ , che corrisponde quindi a  $\left[\frac{m \cdot \pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k) + 1 - \pi_k}{m \cdot \pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k)}\right]^{-1}$ , ossia  $\frac{1}{\frac{m \cdot \pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k) + 1 - \pi_k}{m \cdot \pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k)}}$ , ovvero  $\frac{m \cdot \pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k)}{m \cdot \pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k) + 1 - \pi_k}$ . È poi possibile dividere sia il numeratore che il denominatore per il numero massimo di categorie di risposta ( $m$ ):  $\frac{m \cdot \pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k)}{m \cdot \pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k) + \frac{(1 - \pi_k)}{m}}$ , quindi si ottiene che  $\tau = \frac{\pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k)}{\pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k) + (1 - \pi_k) \cdot \frac{1}{m}}$ . Si può notare che il denominatore corrisponde alla funzione di massa di probabilità della v.c. CUB, infatti:  $\frac{1}{m}$  è la distribuzione di probabilità della v.c. Uniforme discreta e  $(1 - \pi_k)$  è il peso che tale distribuzione ha all'interno del modello CUB.

La probabilità  $\tau_{r|\theta_k}$  può poi essere utilizzata per calcolare il valore atteso (*expectation*) della funzione di log-verosimiglianza completa del modello CUB (D’Elia e Piccolo, 2005), entrando quindi nella fase di “Expectation”<sup>38</sup> dell’algoritmo EM. Infatti,  $\tau_{r|\theta_k}$  esprime la probabilità che la risposta  $r$  derivi dalla componente di *feeling*, cioè corrisponde al valor medio della variabile latente  $z$  relativa alla binomiale, calcolato sulla base dei dati osservati e degli ultimi parametri stimati dall’algoritmo. È dunque possibile sostituire  $\tau_{r|\theta_k}$  alla variabile  $z$  legata alla v.c. Binomiale e, di conseguenza  $(1 - \tau_{r|\theta_k})$  alla v.c. Uniforme, dato che quest’ultimo valore indica la probabilità che la risposta derivi dalla componente di incertezza.

Queste sostituzioni consentono quindi di calcolare il valore atteso della funzione di log-verosimiglianza completa del modello CUB, rappresentato dalla formula di seguito riportata:

$$\mathbb{E}(\ell_C(\theta_k)) = \sum_{i=1}^n \{ \tau_{r|\theta_k} [\log(\pi \cdot P_{Bin}(x_i; \xi))] + (1 - \tau_{r|\theta_k}) [\log((1 - \pi) \cdot P_U(m))] \}.$$

A questo punto, visto che  $\tau_{r|\theta_k}$  è un valor medio relativo a tutte le  $n_r$  risposte fornite da quelle persone che hanno scelto la stessa alternativa di risposta  $r$ , è possibile riscrivere la sommatoria nella formula del valore atteso  $\mathbb{E}(\ell_C(\theta_k))$ , sommando non più per ogni singola risposta  $i$  ma per ciascuna categoria  $r$ . Per fare ciò, però, sarà necessario moltiplicare il valore contenuto nella sommatoria per la frequenza assoluta  $n_r$ ; si ottiene così una nuova espressione del valore atteso della funzione di log-verosimiglianza completa, che può essere indicata con  $Q(\theta_k)$ :

$$Q(\theta_k) = \mathbb{E}(\ell_C(\theta_k)) = \sum_{r=1}^m \{ n_r \cdot \tau_{r|\theta_k} \cdot \log(\pi_k \cdot P_{Bin}(r, \xi_k)) + n_r \cdot (1 - \tau_{r|\theta_k}) \cdot \log(\pi_k \cdot P_U(m)) \},$$

dove  $P_U(m) = \frac{1}{m}$  e  $P_{Bin}(r, \xi_k) = \binom{m-1}{r-1} \cdot (1 - \xi)^{r-1} \cdot (\xi)^{(m-r)}$ .

Il calcolo di questa funzione serve per poter stimare il parametro  $\xi_{k+1}$ , che, infatti, corrisponderà a quel valore che permette di massimizzare  $Q(\theta_k)$ . Tale valore viene individuato nella fase di “Maximization” dell’algoritmo EM (D’Elia e Piccolo, 2005), che prevede che venga calcolata la derivata parziale della funzione  $Q$  rispetto a  $\xi$  e che essa venga posta uguale a zero.<sup>39</sup>

<sup>38</sup> Focalizzandosi sulle singole risposte fornite dagli  $n$  rispondenti anziché sulle categorie di risposta  $r$ , la probabilità  $\tau$  potrebbe essere considerata essa stessa come il valore atteso di una variabile latente che esprime da quale delle due componenti (di *feeling* o di incertezza) ciascuna delle  $n$  risposte deriva (D’Elia e Piccolo, 2005).

<sup>39</sup> Questa è la condizione di primo ordine per la massimizzazione, che consente di individuare i punti stazionari della funzione, tra i quali può esserci il punto di massimo, che andrà individuato tramite la condizione di secondo ordine, calcolando anche la derivata seconda.

A tale scopo, risulta più agevole scindere la formula di  $Q(\theta_k)$  in due sommatorie diverse, una per la componente di *feeling* e una per quella di incertezza (D'Elia e Piccolo, 2006):

$$Q(\theta_k) = \sum_{r=1}^m \{n_r \tau_{r|\theta_k} [\log(\pi_k) + \log(P_{Bin}(r, \xi_k))]\} + \sum_{r=1}^m \{n_r(1 - \tau_{r|\theta_k}) [\log(\pi_k) + \log(P_U(r))]\}.$$

Per calcolare la derivata parziale di  $Q(\theta_k)$  rispetto a  $\xi_k$ , la seconda sommatoria non è rilevante in quanto non include la variabile rispetto alla quale si desidera derivare (dunque la derivata sarà 0); quanto alla prima sommatoria, invece, essa può essere utile riscriverla come segue:

$$\frac{\partial Q(\theta_k)}{\partial \xi_k} = \frac{\partial [\sum_{r=1}^m \{ [n_r \cdot \tau_{r|\theta_k} \cdot \log(\pi_k)] + [n_r \cdot \tau_{r|\theta_k} \cdot \log(P_{Bin}(r, \xi_k))] \}]}{\partial \xi_k} + [0]$$

Anche in questo caso, nella sommatoria il primo addendo non contiene  $\xi_k$ , la sua derivata parziale sarà pari a 0; relativamente al secondo addendo, andrà effettuato il calcolo della sua derivata parziale:

$$\frac{\partial Q(\theta_k)}{\partial \xi_k} = \sum_{r=1}^m \left\{ [0] + n_r \cdot \tau_{r|\theta_k} \cdot \frac{\partial \log(P_{Bin}(r, \xi_k))}{\partial \xi_k} \right\} + [0] = \sum_{r=1}^m \left\{ n_r \cdot \tau_{r|\theta_k} \cdot \frac{\partial \log(P_{Bin}(r, \xi_k))}{\partial \xi_k} \right\}.$$

Ponendo la derivata parziale di  $Q$  pari a 0 è possibile individuare il punto stazionario corrispondente al massimo della funzione, che rappresenta dunque il valore da attribuire al parametro  $\xi_{k+1}$ , ossia la stima provvisoria di  $\xi$  da impiegare nell'iterazione successiva (D'Elia e Piccolo, 2005), data da:

$$\xi_{k+1} = \frac{m - \frac{\sum_{i=1}^r r \cdot n_r \cdot \tau_{r|\theta_k}}{\sum_{i=1}^r n_r \cdot \tau_{r|\theta_k}}}{m - 1} = \frac{m - \bar{R}_n(\theta_k)}{m - 1}, \quad \text{dove } \bar{R}_n(\theta_k) = \frac{\sum_{i=1}^r r \cdot n_r \cdot \tau_{r|\theta_k}}{\sum_{i=1}^r n_r \cdot \tau_{r|\theta_k}}.$$

Si può notare che il nuovo valore di  $\xi_{k+1}$  si calcola in modo molto simile al valore iniziale a cui viene inizializzato il parametro prima di partire con le iterazioni ( $\xi_0 = \frac{m - \bar{R}_n}{m - 1}$ ); in quel caso, però,  $\bar{R}_n$  rappresentava la risposta media calcolata sui dati osservati, mentre in questo caso  $\bar{R}_n(\theta_k)$  si riferisce al valore medio delle risposte che sarebbero generate dalla distribuzione CUB (D'Elia e Piccolo, 2005) ipotizzando che i suoi parametri assumano il valore delle stime provvisorie (contenute in  $\theta_k = (\pi_k, \xi_k)$ ) calcolate all'iterazione precedente dell' algoritmo EM.

A questo punto, quando anche la fase di massimizzazione risulta conclusa, entrambi i parametri  $\pi_{k+1}$  e  $\xi_{k+1}$  sono stati calcolati; essi vengono inseriti nella posizione  $k + 1$  del vettore di parametri  $\theta_{k+1}$ , sulla base del quale può essere calcolato il nuovo valore della funzione di log-verosimiglianza (Piccolo, 2006), cioè  $\ell(\theta_{k+1})$ . Quest'ultimo viene confrontato con il valore precedente,  $\ell(\theta_k)$ , e, nel caso in cui la differenza tra i due valori sia superiore alla soglia di tolleranza  $\varepsilon$ , (Piccolo, 2006), l'algoritmo procede con un'altra iterazione. In caso contrario,

significherà che si è arrivati alla cosiddetta convergenza dell'algoritmo: gli ultimi parametri stimati ( $\theta_{k+1} = (\pi_{k+1}, \xi_{k+1})$ ) rappresenteranno quei valori che massimizzano la funzione di verosimiglianza del modello CUB, e verranno inseriti nel vettore  $\hat{\theta} = (\hat{\pi}, \hat{\xi}) = (\pi_{k+1}, \xi_{k+1})$ .

Sulla base del valore che assumono i parametri  $\hat{\pi}$  e  $\hat{\xi}$ , stimati dall'algoritmo EM in base al metodo di massima verosimiglianza, è possibile ottenere informazioni sulle componenti del processo decisionale ipotizzato dal modello CUB.

## 2.6. Bontà della rappresentazione

Attraverso i parametri  $\hat{\pi}$  e  $\hat{\xi}$  è possibile calcolare la funzione di massa di probabilità della variabile casuale CUB, che indica la probabilità che ciascuna categoria di risposta  $r$  ha di essere scelta, in presenza di un'incertezza pari a  $(1 - \hat{\pi})$  e di un *feeling* pari a  $(1 - \hat{\xi})$ . Più tale probabilità è simile all'effettiva frequenza con cui la categoria si presenta nei dati osservati, e più il modello sarà in grado di rappresentare fedelmente le risposte raccolte in un questionario impiegando una scala ordinale. Quando questo avviene, significa che il livello di adattamento del modello ai dati osservati è soddisfacente e, quindi, si può ritenere che le informazioni sulle componenti di *feeling* e incertezza descrivano in modo adeguato il processo mentale che ha portato a generare le risposte che sono state rilevate.

Il livello di adattamento del modello CUB può essere misurato attraverso un indice normalizzato denominato "indice di dissimilarità", che può essere indicato con *Diss*; esso misura la percentuale di risposte osservate che dovrebbero essere cambiate affinché il modello si adatti perfettamente ai dati (Piccolo e Simone, 2019). L'indice di dissimilarità, essendo normalizzato, può assumere valori compresi tra 0 a 1 (Iannario, 2007); un valore pari a 1 indica che il modello si adatta perfettamente alle risposte rilevate, mentre un valore di 0 indicherebbe la totale inadeguatezza del modello a rappresentare i dati osservati.

Si può ritenere che valori dell'indice non superiori a 0,10 (dunque  $Diss \leq 0,10$ ) denotino «un livello di adattamento accettabile» (Iannario e Piccolo, 2010a); in particolare, con un indice inferiore a 0,09 ( $Diss < 0,09$ ) «ci si può ritenere adeguatamente soddisfatti di come il modello CUB si adatta» ai dati osservati (Iannario, 2007). Questo significa che, quando la percentuale di risposte che dovrebbero essere modificate per garantire un perfetto adattamento è inferiore al 10%, il modello CUB è in grado di descrivere sufficientemente bene la distribuzione di

frequenze delle risposte raccolte: la variabile casuale CUB, in corrispondenza dei due parametri stimati, è in grado di generare delle risposte che, per almeno il 90%, corrispondono esattamente ai dati osservati.<sup>40</sup> Valori dell'indice di dissimilarità maggiori di 0,10 segnaleranno, invece, che una discreta percentuale delle risposte dovrebbe essere cambiata per garantire un livello di adattamento eccellente: ciò significa che le risposte generate dal CUB che corrispondono esattamente a quelle osservate rappresentano una quota non estremamente elevata del totale.

L'indice di dissimilarità viene calcolato come di seguito riportato (Piccolo e Simone, 2019):

$$Diss = \frac{1}{2} \cdot \sum_{r=1}^m |f_r - P_{CUB(\hat{\pi}, \hat{\xi})}(R = r)|, \quad \text{per semplicità: } Diss = \frac{1}{2} \cdot \sum_{r=1}^m |f_r - p_r|.$$

Si tratta di una sommatoria delle differenze tra la frequenza relativa<sup>41</sup>  $f_r$  della categoria di risposta  $r$  e la probabilità  $p_r$  che, secondo il modello CUB, tale alternativa di risposta ha di essere scelta dai rispondenti (Iannario, 2007). Ogni differenza viene considerata in valore assoluto per evitare compensazioni di segno.

Il valore finale dell'indice si ottiene dividendo per 2 la sommatoria delle differenze in valore assoluto; questo permette all'indice di dissimilarità di essere interpretato come la percentuale di risposte che andrebbero cambiate per garantire un adattamento al 100% del modello probabilistico ai dati osservati. Questo aspetto può essere chiarito mediante l'esempio presentato in Figura 2.4, che riporta il caso di una scala ordinale con 5 alternative di risposta la cui prima e ultima categoria presentano una frequenza relativa osservata che coincide con la probabilità derivante dal modello CUB. Riguardo alle restanti alternative di risposta, la seconda e la quarta sono caratterizzate da una frequenza relativa inferiore di 0,2 punti percentuali rispetto a quella teorica; di conseguenza, la rimanente categoria – ossia quella centrale – presenterà una frequenza osservata superiore a quella teorica di 0,4 punti percentuali. La somma del valore assoluto delle differenze tra le frequenze relative osservate e le probabilità derivanti dal modello CUM – in corrispondenza dei parametri stimati  $\hat{\pi}$  e  $\hat{\xi}$  – nell'esempio risulterà pari a 0,8 punti percentuali (in quanto  $|-0,2\%| + |-0,2\%| + |0,4\%| = 0,8\%$ ). L'indice di

<sup>40</sup> La quota di risposte generate dal modello CUB che corrispondono esattamente ai dati osservati può essere misurata dall'indice  $F^2$ , che è proprio calcolato come  $F^2 = 1 - Diss$  (Iannario, 2009). Quando il valore di tale indice risulta superiore o uguale a 0,90, il livello di adattamento è da considerarsi accettabile (Iannario, 2009).

<sup>41</sup> La frequenza relativa osservata è data da  $f_r = \frac{n_r}{n}$ , dove  $n = \sum_{r=1}^m n_r$  rappresenta il numero complessivo di risposte raccolte, mentre  $n_r$  corrisponde alla frequenza assoluta di una certa alternativa di risposta  $r$ , ossia indica il numero di volte che essa è stata scelta dai rispondenti del questionario.

dissimilarità assumerà quindi un valore di 0,004 (corrispondente allo 0,4 %, dato che  $Diss = \frac{1}{2} \cdot 0,8\% = \frac{0,008}{2} = 0,0004 = 0,4\%$ ); si tratta di un valore molto prossimo a 0, che indica un livello di adattamento molto elevato. In particolare, il valore di  $Diss = 0,004 = 0,4\%$  indica che sarebbe sufficiente cambiare lo 0,4% delle risposte per fare sì che il modello CUB si adatti perfettamente ai dati osservati. Per fare questo, servirebbe che un certo numero (pari allo 0,2% del totale) di rispondenti che hanno scelto la categoria “3” cambiasse la sua risposta scegliendo l’alternativa “2” e che lo stesso numero di persone (cioè lo 0,2% dei rispondenti) scegliesse, al posto della categoria centrale, l’alternativa “4”. In questo modo, le frequenze relative osservate eguaglierebbero le probabilità derivanti dal modello CUB, in corrispondenza dei parametri stimati sulla base dei dati osservati, portando l’indice di dissimilarità ad assumere un valore pari a 1.

$r$	$f_r$	$p_r$	$f_r - p_r$	$ f_r - p_r $
1	8,8%	8,8%	0,0%	0,0%
2	23,9%	24,1%	-0,2%	0,2%
3	34,6%	34,2%	0,4%	0,4%
4	23,9%	24,1%	-0,2%	0,2%
5	8,8%	8,8%	0,0%	0,0%
<b>Tot.</b>	<b>100,0%</b>	<b>100,0%</b>	—	<b>0,8%</b>

$$Diss = \frac{1}{2} \cdot \sum |f_r - p_r| = \frac{0,8\%}{2} = \underline{\underline{0,4\%}}$$

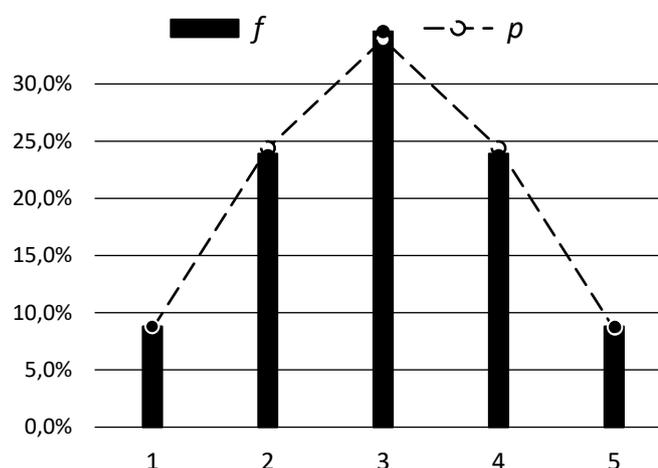


Figura 2.4. – Esempio per il calcolo dell’indice di dissimilarità.

Fonte: Nostra elaborazione (nella quale le stime risultano:  $\hat{\pi} = 0,816$  e  $\hat{\xi} = 0,5$ ).

Quando il livello di adattamento del modello è soddisfacente, i parametri stimati attraverso l’algoritmo EM possono essere impiegati per ottenere importanti informazioni in merito al processo psicologico che ha generato le risposte osservate.

## 2.7. Utilizzo dei modelli CUB

Un primo aspetto che si può valutare, una volta analizzate mediante il modello CUB le risposte raccolte su una scala ordinale, è il peso relativo delle due componenti latenti nel processo psicologico di risposta. Questa informazione si ottiene a partire dal valore stimato di  $\hat{\pi}$ , che rappresenta il peso della v.c. Binomiale traslata nella funzione di massa di probabilità della v.c. CUB e, pertanto, indica quanto la componente di *feeling* è rilevante nel determinare la risposta

finale. Il complemento a 1 della stima del parametro  $\hat{\pi}$ , ossia  $(1 - \hat{\pi})$ , esprimerà invece il peso associato alla variabile casuale Uniforme discreta e fornirà quindi informazioni sul livello di incertezza soggettiva che ha caratterizzato la scelta della categoria di risposta.

Quando  $\hat{\pi}$  risulta superiore a 0,5, la componente di *feeling* pesa più di quella di incertezza e, più questo valore aumenta, più l'incertezza, rappresentata da  $(1 - \hat{\pi})$ , tende a essere contenuta: la risposta fornita risulta per lo più frutto di una valutazione attenta e ben ponderata. Al contrario, quando  $\hat{\pi}$  è minore di 0,5, la componente di incertezza risulta la più rilevante; più tale valore tende a 0, più la risposta finale deriverà da una scelta casuale dovuta all'incertezza soggettiva.

Inoltre, può rivelarsi utile calcolare la quota di incertezza stimata, data da:  $q. i. = \frac{1-\hat{\pi}}{m}$ , che indica quanto l'incertezza impatta – in termini di punti percentuali – sulla probabilità che ciascuna delle alternative di risposta ha di essere scelta secondo il modello CUB. La componente di incertezza, infatti, influisce sulla probabilità delle varie categorie in egual misura: dal punto di vista grafico, è possibile considerare che la quota di incertezza sia rappresentata da una retta orizzontale, come mostra l'esempio riportato in Figura 2.5. nel caso di una scala con 5 alternative di risposta.

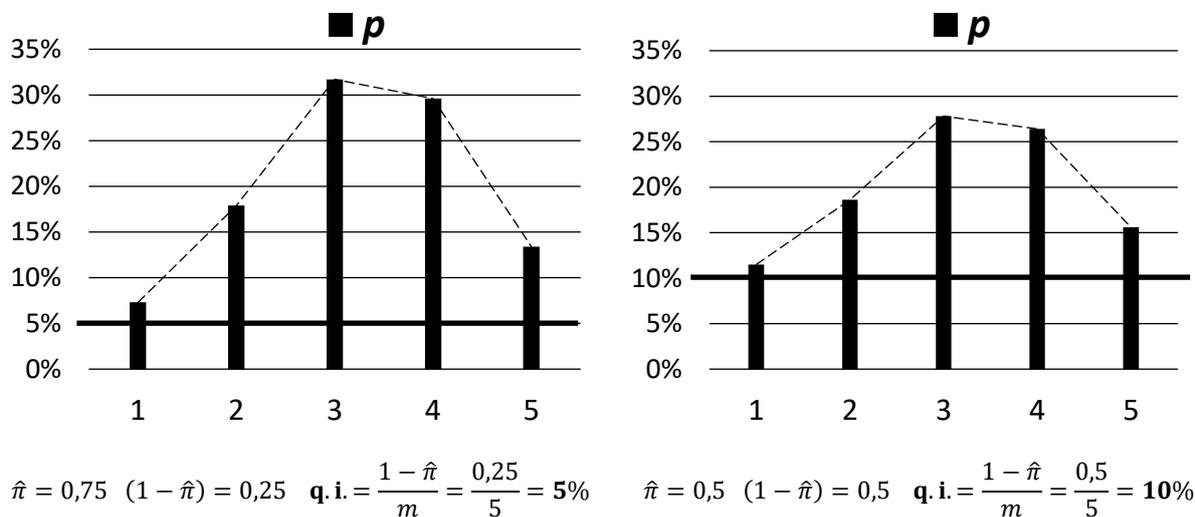


Figura 2.5. – Effetto di due valori diversi della quota di incertezza.

Fonte: Nostra elaborazione.

La linea che rappresenta la quota di incertezza stimata, in sostanza, suddivide in due parti la probabilità “complessiva” determinata dal modello CUB sulla base dei parametri stimati: la parte al di sotto della linea rappresenta la probabilità derivante dalla componente di incertezza, mentre la restante parte si riferisce alla probabilità associata alla componente di *feeling*.

All'aumentare del valore di  $(1 - \hat{\pi})$ , la quota di incertezza diventa più elevata e, quindi, la retta orizzontale che la rappresenta si sposta verso l'alto: a parità di probabilità complessiva determinata dal CUB, la componente di incertezza aumenta il suo peso relativo rispetto a quella di *feeling*. Quanto appena affermato deriva dal fatto che la quota di incertezza  $\frac{1-\hat{\pi}}{m}$  altro non è che il prodotto della distribuzione di probabilità della v.c. Uniforme discreta (data da  $\frac{1}{m}$ ) e del peso di tale componente nella v.c. CUB (ossia  $1 - \hat{\pi}$ ).

Una volta individuato il peso della componente di *feeling* in relazione a quella di incertezza, il valore stimato del parametro  $(1 - \hat{\xi})$  permette di capire quale sia l'intensità di tale *feeling*, ossia della preferenza o della percezione dei rispondenti nei confronti dell'aspetto valutato. Valori piuttosto alti del parametro di *feeling*  $(1 - \hat{\xi})$  indicheranno, ad esempio, che vi è un elevato livello di accordo con l'affermazione contenuta nella scala di Likert, o che il giudizio dei rispondenti – per esempio in merito alla soddisfazione o all'importanza dell'oggetto di valutazione – è alto. Sarà quindi più probabile che, al netto dell'incertezza soggettiva, vengano scelte le categorie di risposta rappresentate dai numeri più alti.

Il modello CUB consente di ottenere un'informazione molto più accurata di quella che si avrebbe semplicemente osservando la distribuzione di frequenze delle risposte a una certa domanda. Già dalla distribuzione si può desumere che il *feeling* verso l'aspetto indagato è per lo più positivo quando le frequenze più elevate si trovano nella parte destra, in corrispondenza delle categorie che esprimono i giudizi più alti; tuttavia, la distribuzione di frequenze dà un'idea complessiva sulla preferenza, che non consente di isolare la componente di incertezza da quella di *feeling* vero e proprio, fornendo un'informazione meno analitica e precisa rispetto a quella che si può ottenere con il CUB.

Tramite la stima dei parametri del modello CUB, invece, è possibile isolare l'effetto dell'incertezza da quello del *feeling* dei rispondenti verso l'aspetto indagato. In particolare, diventa possibile sintetizzare la preferenza o la percezione degli  $n$  rispondenti – espressa su una scala qualitativa ordinale – tramite una misura quantitativa, fornita dalla stima del parametro di *feeling*  $(1 - \hat{\xi})$ . Esso può assumere valori compresi tra 0 e 1, dove 1 rappresenta il livello “massimo teorico” di preferenza; ciò consente di interpretare in modo piuttosto agevole il livello di “*feeling*” del rispondente. Valori di  $(1 - \hat{\xi})$  molto prossimi a 1 indicheranno un livello di preferenza – medio tra gli  $n$  rispondenti – molto elevato; valori vicini a 0 si avranno, invece,

nel caso di bassa preferenza. Dei valori vicini a 0,5, infine, denoteranno un livello di preferenza intermedio, che – qualora la formulazione della domanda e la scala impiegata lo consentano – potrebbe denotare neutralità, ad esempio nel caso delle scale di Likert con l’opzione “né in accordo né in disaccordo”.

Il fatto che la misura del *feeling* – così come il parametro di incertezza – rientrino nell’intervallo  $[0,1]$ , indipendentemente dalla tipologia di scala impiegata o di domanda effettuata, consente poi di confrontare i risultati ottenuti dall’analisi di più scale diverse, qualora queste fossero impiegate in una batteria di *item* per indagare un aspetto complesso. Pertanto, per confrontare tra loro più scale ordinali, può risultare particolarmente utile rappresentare graficamente i parametri relativi alle componenti di *feeling* e di incertezza (Piccolo e Simone, 2019).

### **2.7.1. Rappresentazione grafica delle misure di *feeling* e incertezza**

Quando in un questionario vengono impiegate più scale per una certa analisi e a esse si applica il modello CUB<sup>42</sup>, è anzitutto possibile confrontare il valore della componente di incertezza per ciascuna di esse; per esempio, si potrebbe pensare di ordinare le diverse scale – e dunque i vari *item* – in modo crescente rispetto al valore stimato del loro parametro di incertezza  $(1 - \hat{\pi})$ . Lo stesso potrebbe poi essere fatto con la stima del parametro di *feeling*  $(1 - \hat{\xi})$ , in modo da valutare, a seconda del significato che il *feeling* assume in una specifica domanda, quali siano gli *item* ai quali viene attribuita la maggiore importanza, sui quali i rispondenti sono maggiormente soddisfatti o verso i quali si mostrano più d’accordo.

Combinando le misure di *feeling* e di incertezza è possibile rappresentare in forma grafica le diverse scale utilizzate, posizionandole su un piano in base ai valori stimati dei parametri rappresentativi delle due componenti del processo di risposta. In particolare, visto che lo spazio parametrico del modello CUB è dato da  $\Omega = \{ \pi, \xi : \pi \in (0,1], \xi \in [0,1] \}$ , anche le stime dei parametri di incertezza,  $(1 - \hat{\pi})$ , e di *feeling*,  $(1 - \hat{\xi})$ , assumeranno valori compresi tra 0 e 1. Il piano su cui rappresentare tali valori corrisponde quindi al quadrato di lato unitario, che risulta “aperto” (Piccolo e Simone, 2019) nel lato corrispondente a  $(1 - \hat{\pi}) = 1$ , in quanto il modello

---

<sup>42</sup> Va precisato che il CUB non è un modello multivariato (Corduas, 2014), cioè, anche qualora vengano utilizzate più scale per analizzare diversi *item* relativi ad un certo argomento, il modello considererà una scala per volta durante la stima dei parametri. Pertanto, il modello non permette di sfruttare l’informazione sul “comportamento di risposta” delle persone tramite un’analisi che consideri, contemporaneamente, tutte le scale che formano la batteria di *item*, cosa che, al contrario, è consentita da altre tecniche statistiche multivariate, per esempio l’Analisi delle Componenti Principali Non Lineare (Linting et al., 2007). Ad ogni modo, si sono riscontrati alcuni tentativi di estendere il modello CUB in un’ottica multidimensionale e quindi multivariata (Corduas, 2014; Andreis e Ferrari, 2013).

CUB richiede che il valore di  $\hat{\pi}$  sia diverso da 0 e cioè che, almeno in minima parte, la componente di *feeling* influenzi la scelta finale della risposta.

La rappresentazione delle stime dei parametri di *feeling* e incertezza avviene quindi su un piano come quello riportato in Figura 2.6, in cui, convenzionalmente,  $(1 - \hat{\pi})$  è rappresentato in ascissa e  $(1 - \hat{\xi})$  in ordinata (Piccolo e Simone, 2019).

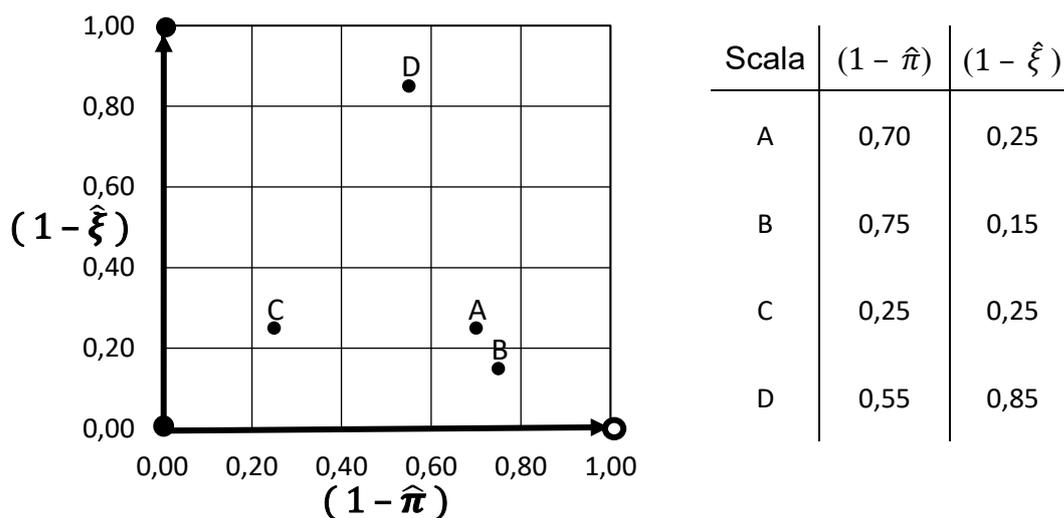


Figura 2.6. – Esempio di rappresentazione grafica delle misure di *feeling* e incertezza.  
Fonte: Nostra elaborazione.

La rappresentazione grafica delle misure che forniscono informazioni sulle due componenti latenti del processo psicologico di risposta consente di confrontare, in modo immediato, un numero anche elevato di scale ordinali impiegate in un questionario. È possibile individuare i casi in cui l'incertezza soggettiva è stata molto rilevante, tanto da portare molte persone a rispondere quasi in modo casuale; in queste situazioni si dovrebbe cercare di capire cosa abbia causato tanta incertezza. Dal grafico è poi possibile confrontare le varie scale in base al livello di *feeling* manifestato dai rispondenti, individuando cioè quegli *item* in cui la preferenza nei confronti dell'aspetto valutato risulta, mediamente, più elevata.

### 2.7.2. Covariate e classe dei modelli CUB

Un aspetto rilevante della formulazione più semplice del modello CUB – ossia quella presentata nel presente Capitolo, che può essere indentificata come CUB(0,0), (Piccolo, 2006) – è dato dal fatto che le informazioni fornite dai parametri stimati  $\hat{\pi}$  e  $\hat{\xi}$  riguardano la totalità dei rispondenti. Relativamente alla singola persona che ha risposto a un questionario non viene invece fornita alcuna misura quantitativa del livello individuale di incertezza e di *feeling*.

Già nei primissimi anni dall'introduzione del modello CUB (0,0), è stata proposta la versione che impiega le cosiddette “*covariate*”, cioè delle variabili relative ad alcune caratteristiche dei rispondenti – ad esempio quelle anagrafiche come l'età, il sesso, la professione, (D'Elia, 2003) – grazie alle quali possono essere individuati più gruppi di persone, per ciascuno dei quali vengono stimati i parametri del modello. In particolare, le *covariate* possono essere introdotte per la sola componente di incertezza, e il modello viene indicato con CUB (1,0), soltanto per quella di *feeling*, nel CUB (0,1), o per entrambe – nel CUB (1,1) (Piccolo, 2006). Grazie all'utilizzo delle *covariate*, pur non ottenendo informazioni sul singolo individuo, può essere effettuata un'analisi più approfondita della preferenza o della percezione (D'Elia, 2003) di gruppi – anche piccoli – di rispondenti, che condividono una certa caratteristica.

Sfruttando l'elemento distintivo del CUB, ossia quello di includere una componente di incertezza (Piccolo e Simone, 2019), il modello è stato poi esteso per riuscire a trattare, all'interno di un questionario, anche le risposte del tipo “*non so*”. Tradizionalmente, infatti, questo genere di risposta è considerato alla stregua di un dato mancante e, per questo, generalmente viene estromesso dall'analisi (Manisera e Zuccolotto, 2014a). È stato invece proposto (Manisera e Zuccolotto, 2014a) di impiegare il modello CUB per includere anche i “*non so*”, considerando queste risposte come sinonimo di massima incertezza, proponendo quindi di sommare la misura di incertezza a esse collegata con la quota di incertezza già inserita nel modello tradizionale relativamente alle risposte “effettivamente espresse”.

La classe dei modelli CUB ha assistito a diverse proposte di estensione della formulazione originaria, tra cui quella del NLCUB (Manisera e Zuccolotto, 2014), un modello non lineare che considera che ogni alternativa di risposta possa avere una diversa probabilità di “successo” rispetto alle altre. Grazie a un inquadramento concettuale nuovo rispetto alla proposta originaria del CUB (Manisera e Zuccolotto, 2014), il modello è in grado di considerare anche il modo in cui le varie categorie vengono percepite dai rispondenti nelle diverse scale ordinali impiegate. A partire da questa nuova concettualizzazione del processo decisionale è stata sviluppata anche un'altra proposta molto recente (Manisera e Zuccolotto, 2022), rappresentata dal modello CUM – pensato per l'analisi dei dati raccolti su scale a differenziale semantico e presentato nel Capitolo 3.

## CAPITOLO 3

# MODELLO CUM PER L'ANALISI DEI DATI RACCOLTI SU SCALE A DIFFERENZIALE SEMANTICO

Quando ai rispondenti di un questionario viene chiesto di formulare la loro risposta su una scala ordinale, avvalendosi del modello statistico CUB (presentato nel Capitolo 2) è possibile ottenere importanti informazioni sul processo mentale che ha determinato le risposte osservate. Se, per esempio, un'impresa volesse condurre una ricerca di mercato presso i suoi clienti – magari avvalendosi di scale di tipo Likert per misurare aspetti come la soddisfazione verso un prodotto – grazie al modello CUB potrà ottenere un'informazione analitica che consentirà di distinguere la componente di incertezza soggettiva dal *feeling* vero e proprio manifestato dai rispondenti verso l'aspetto da valutare.

Risulterebbe molto utile poter ottenere questo genere di informazioni anche quando i dati vengono raccolti mediante un particolare tipo di scale di misurazione ordinali: quelle a differenziale semantico, nelle quali il giudizio viene espresso lungo un continuum tra due estremi di significato opposto. Utilizzando un modello statistico sviluppato a partire dalla classe dei modelli CUB, è possibile ottenere informazioni sulle due componenti latenti di *feeling* e di incertezza anche nell'ambito delle scale a differenziale semantico. Questo modello è denominato CUM, in quanto si ottiene dalla combinazione di due variabili casuali discrete: una v.c. Uniforme e una Multinomiale.

Il modello CUM, così come il modello CUB originario e molte delle sue estensioni formulate nel corso degli anni, possono essere ricondotti a uno schema generale di concettualizzazione del processo decisionale (Manisera e Zuccolotto, 2014b), sempre mantenendo l'ipotesi che le componenti più rilevanti di quest'ultimo siano quella di *feeling* e quella di incertezza. Questo schema concettuale comprende una serie di elementi che possono essere modificati in base alla tipologia di dati che si ha a disposizione e in funzione delle informazioni che si desidera ricavare, al fine di ottenere uno specifico modello statistico per l'analisi dei dati ordinali. Scegliendo opportunamente i diversi elementi che consentono di rappresentare, in termini matematici, il processo decisionale, è anzitutto possibile ricavare molti dei modelli che, negli ultimi anni, sono stati elaborati nell'ambito della classe CUB; al contempo, è anche possibile dare

origine a modelli statistici nuovi, come è avvenuto nel caso del NLCUB (Manisera e Zuccolotto, 2014b) e del CUM (Manisera e Zuccolotto, 2022). Questo modello è stato pensato per fornire uno strumento specifico per l'analisi dei dati raccolti su scale a differenziale semantico, anche se esso può essere applicato a tutte quelle scale ordinali che presentano un numero dispari di categorie, per le quali è ragionevole pensare che i rispondenti partano dalla modalità centrale della scala per poi decidere se spostarsi verso una categoria inferiore o superiore (Manisera e Zuccolotto, 2022). Dopo aver definito gli elementi dello schema concettuale generale che consente di rappresentare il processo psicologico di risposta a una scala ordinale, verrà analizzato il modello CUM, in particolare relativamente alla distribuzione di probabilità a esso associata, al significato dei suoi parametri, al modo in cui effettuare la stima di questi ultimi e in cui utilizzare il modello per ottenere informazioni sul processo decisionale che ha generato le risposte osservate.

### **3.1. Formulazione generale del processo di risposta a una scala ordinale**

Nel momento in cui viene chiesto a una persona di rispondere a una scala ordinale, spesso per indagare un tratto latente, nella sua mente si origina un processo psicologico complesso che conduce alla scelta dell'alternativa di risposta (Manisera e Zuccolotto, 2022). Si può ritenere che questi articolati meccanismi cognitivi possano essere sintetizzati da due componenti: l'incertezza soggettiva nella decisione della categoria della scala ordinale e il *feeling* del rispondente, ovvero la sua percezione rispetto all'aspetto da valutare. Questa è esattamente l'idea su cui si fonda il modello CUB originario (D'Elia e Piccolo, 2005) e che è condivisa da tutti i modelli statistici sviluppati all'interno della classe CUB. In tali modelli, tuttavia, vengono effettuate delle ipotesi molto specifiche in merito alla componente di *feeling*, considerando che essa possa essere rappresentata da una variabile casuale Binomiale, impiegando invece un'Uniforme discreta per la componente di incertezza.

Considerare che un soggetto incerto sia portato a scegliere in modo casuale l'alternativa di risposta risulta del tutto ragionevole; di conseguenza, è possibile considerare che, nelle situazioni di massima incertezza soggettiva, ogni categoria abbia la medesima probabilità di essere scelta rispetto alle altre, giustificando quindi l'impiego della v.c. Uniforme. Relativamente alla componente di *feeling*, invece, potrebbe essere utile considerarla in termini più generali, in modo da racchiudere all'interno del medesimo schema concettuale un'ampia

varietà di modelli, includendo molti di quelli già esistenti, ma anche aprendo la strada alla creazione di nuovi modelli – come è avvenuto nel caso del CUM. In particolare, è possibile considerare che la componente di *feeling* del processo decisionale derivi da un percorso – il cosiddetto “*feeling path*”, (Manisera e Zuccolotto, 2014b) – costituito da un certo numero di passi che vengono eseguiti – per lo più in modo inconscio – nella mente del rispondente. Nel percorso di *feeling*, per ognuno dei passi che lo costituiscono, vengono ripetute alcune operazioni: la formulazione di un giudizio elementare, l’accumulazione dei singoli giudizi elementari che la propria mente ha elaborato fino a quel momento, e la formulazione del giudizio provvisorio in merito a quale categoria della scala scegliere (Manisera e Zuccolotto, 2014b). Una volta conclusi tutti i passi del *feeling path*, si arriverà al giudizio “finale” derivante dalla componente di *feeling*, esso, una volta combinato con la componente di incertezza soggettiva, determinerà la scelta finale del rispondente.

Quella appena presentata è una delle possibili schematizzazioni del processo psicologico di risposta a una scala ordinale (Manisera e Zuccolotto, 2014b); si tratta di una formulazione generale che può rivelarsi particolarmente utile sia per ricostruire il modello CUB originario (D’Elia e Piccolo, 2005) e molte delle sue estensioni, sia per consentire, in funzione delle proprie esigenze informative, di elaborare nuovi modelli di analisi dei dati ordinali. Visto che i meccanismi cognitivi che si realizzano quando si deve rispondere a una scala ordinale sono molto complessi, le formalizzazioni del processo decisionale che possono essere elaborate sono molteplici e possono essere anche molto articolate. Questa tipologia di modello concettuale, invece, oltre a essere molto versatile, non è troppo complessa e non risulta distante dalla visione che viene adottata in diversi ambiti di studio dell’economia aziendale e del marketing. Per le imprese di servizi, per esempio, un aspetto latente che va periodicamente monitorato – tipicamente mediante questionari che impiegano scale ordinali – è rappresentato dalla percezione di qualità complessiva del servizio, manifestata dai clienti che ne usufruiscono. Si può ritenere che i clienti sviluppino una certa idea in merito alla qualità del servizio, sulla base dei giudizi maturati – spesso relativamente a un aspetto specifico del servizio – nel corso di una singola occasione nella quale ne hanno fruito (Hoffman, Bateson, Iasevoli, 2007, p. 297). Quando ai clienti viene chiesto di valutare la qualità del servizio, la loro mente recupererà i ricordi relativi ai singoli momenti di contatto con l’impresa e i relativi giudizi di qualità

formulati in ognuno di essi, sulla base dei quali sarà possibile esprimere una valutazione complessiva sulla qualità del servizio.

### **3.1.1. Il percorso di *feeling***

Lo schema generale relativo alla componente di *feeling* che è stato proposto (Manisera e Zuccolotto, 2014b) considera che nella mente umana venga svolto un percorso caratterizzato da un certo numero ( $T$ ) di passi (ognuno dei quali può essere indicato con  $t$ , dove  $t = \{1, 2, \dots, T\}$ ). Ognuno di questi step è caratterizzato da tre elementi: il giudizio elementare che viene formulato dal rispondente in merito a un ricordo relativo all'aspetto da valutare, il giudizio accumulato – ossia la sintesi di tutti i giudizi elementari espressi fino a quel passo  $t$  – e il giudizio provvisorio – cioè l'alternativa di risposta che verrebbe scelta (in base alla sola componente di *feeling*) se il processo decisionale si concludesse allo step  $t$  in cui ci si trova (Manisera e Zuccolotto, 2014b). Mentre i giudizi elementari vengono formulati attivando la memoria per reperire percezioni o ricordi relativi all'oggetto della domanda, si considera che i giudizi accumulati si ottengano grazie a una “funzione di accumulazione” che consente di sintetizzare più giudizi elementari; si ritiene poi che i giudizi provvisori siano ottenuti trasformando quelli accumulati – per mezzo di una “funzione di *likertizzazione*” – in giudizi che vanno da 1 a  $m$ , in modo che siano compatibili con la scala ordinale utilizzata (Manisera e Zuccolotto, 2014b).

L'intero processo decisionale si fonda sui singoli giudizi elementari espressi dal rispondente, cioè da quell'insieme di percezioni e ricordi relativi a un certo aspetto del tratto latente che viene chiesto di valutare (Manisera e Zuccolotto, 2019). Si parla di giudizi “elementari” anzitutto perché essi corrispondono a sensazioni basilari che la persona associa a un certo aspetto: queste, per esempio, potrebbero essere alternativamente di tipo positivo o negativo, o, eventualmente, oltre a quelle positive e negative potrebbero esserci sensazioni neutre, quando la persona mostra un atteggiamento di indifferenza verso l'aspetto indagato. Inoltre, i giudizi vengono definiti “elementari” in quanto sono relativi a un singolo elemento della variabile latente di interesse o comunque si riferiscono a un singolo episodio nel quale il rispondente ha sperimentato quel determinato fenomeno latente.

Quando una persona deve decidere quale alternativa di una scala ordinale scegliere, in genere, pensa a più episodi singoli nei quali ha avuto esperienza dell'aspetto indagato e dunque formula

più giudizi elementari. Ognuno di questi giudizi caratterizzerà un certo passo del percorso di *feeling*; a ogni step, per tener conto del nuovo giudizio elementare appena formulato, sarà necessario “accumulare” quest’ultimo ai giudizi elementari già formulati agli step precedenti. Questo avviene impiegando la funzione di accumulazione<sup>43</sup> che, a ogni passo del processo decisionale, sintetizza in un giudizio “accumulato” tutti i giudizi elementari formulati fino a quel momento (Manisera e Zuccolotto, 2014b).

L’ultima operazione che viene eseguita in ciascuno dei passi del percorso di *feeling* consiste nella trasformazione del giudizio accumulato in un formato compatibile con la scala di misurazione ordinale che viene fornita nel questionario; quello così ottenuto prende il nome di giudizio “provvisorio” (Manisera e Zuccolotto, 2014b). Quest’ultimo prevede che il giudizio (accumulato) presente nella mente delle persone venga mappato avvalendosi di una delle categorie che compongono la scala che il rispondente ha a disposizione (Manisera e Zuccolotto, 2014b). Questa operazione avviene per mezzo di una funzione che può essere definita di “*likertizzazione*”<sup>44</sup> (Manisera e Zuccolotto, 2014b): nel caso in cui la scala fornita sia per esempio quella di tipo Likert (che potrebbe chiedere di esprimere il proprio livello di accordo con l’affermazione proposta in scala da 1 a 5), la funzione di “*likertizzazione*” si occupa di trasformare il giudizio accumulato – sintesi di tutti i giudizi elementari formulati fino a quel momento – in un valore corrispondente a una delle categorie della scala di risposta.

Una volta arrivati all’ultimo step del percorso di *feeling* (ossia quando  $t = T$ ), tutti i giudizi elementari saranno stati espressi e accumulati dalla funzione di accumulazione; l’ultimo giudizio accumulato viene poi trasformato in un giudizio provvisorio (compatibile con la scala di misurazione) che rappresenta il “giudizio finale” derivante dal percorso di *feeling*. Questo giudizio finale, ossia l’ultimo giudizio provvisorio, rappresenta l’alternativa di risposta che verrebbe scelta qualora la componente di *feeling* fosse l’unica a intervenire nel processo decisionale. Siccome, però, la risposta finale che viene fornita spesso dipende anche da un certo

---

<sup>43</sup> Qualsiasi funzione di accumulazione impiegata dovrà quindi avere una certa caratteristica: a ogni step successivo del processo decisionale (per esempio a  $t + 1$ ) l’insieme dei valori che la funzione può assumere – e quindi l’insieme dei giudizi accumulati che possono essere generati – sarà almeno pari o superiore all’insieme di valori che la funzione poteva assumere nello step precedente, ossia  $t$  (Manisera e Zuccolotto, 2014b).

<sup>44</sup> La caratteristica delle funzioni di “*likertizzazione*” è proprio quella di individuare uno dei valori che costituiscono il supporto discreto della scala ordinale fornita a partire dal giudizio (accumulato) formulato dalla mente del rispondente riguardo all’aspetto oggetto di analisi.

grado di incertezza soggettiva, l'ultimo giudizio provvisorio formulato durante il percorso di *feeling* andrà combinato con la variabile casuale rappresentativa della componente di incertezza (Manisera e Zuccolotto, 2014b).

Anche nel caso del presente schema generale del processo di risposta a una scala ordinale (sintetizzato nella Tabella 3.1.) – come avviene per il modello CUB originario (D'Elia e Piccolo, 2005) – i pesi delle due componenti latenti di *feeling* e incertezza all'interno della v.c. data dalla loro combinazione si considerano, rispettivamente, pari a  $\pi$  e  $1 - \pi$ , (Manisera e Zuccolotto, 2014b).

*Tabella 3.1.* – Schema concettuale del processo psicologico di risposta a una scala ordinale.  
Fonte: Adattamento da Manisera e Zuccolotto, 2014b.

<b>Percorso di <i>feeling</i></b> <i>Ripetuto per <math>t = \{1, 2, \dots, T\}</math></i>	<b>Elemento del processo decisionale che si genera:</b>	<b>Notazione matematica:</b>
Percezione o ricordo di un singolo elemento	Giudizio elementare – step $t$	$x_t$
Funzione di accumulazione ( $f$ )	Giudizio accumulato – step $t$	$w_t = f(x_t)$
Funzione di “ <i>likertizzazione</i> ” ( $d$ )	Giudizio provvisorio – step $t$	$r_t = d(w_t)$

<b>Determinanti della risposta finale</b>	<b>Corrisponde a:</b>	<b>Con probabilità:</b>
Componente di <i>feeling</i> (risultante dal percorso di <i>feeling</i> )	Ultimo giudizio provvisorio $r_T$	$\pi$
Componente di incertezza	Scelta casuale	$(1 - \pi)$

Dal punto di vista statistico, i giudizi elementari possono essere considerati come una sequenza di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite (Manisera e Zuccolotto, 2014b); ciascuna di esse sarà caratterizzata dal medesimo supporto, che conterrà i valori numerici associati a ciascuna delle tipologie di giudizi elementari che possono essere formulati dai rispondenti. Per esempio, nel caso in cui a ciascun giudizio elementare sia associata una v.c. di Bernoulli, ci saranno due tipologie di possibili giudizi elementari, rappresentate dai valori “0” o “1”, visto che gli esiti delle prove di tipo Bernoulliano sono dicotomici. Nel caso in cui ogni giudizio elementare sia rappresentato da una v.c. Multinoulli, invece, ci saranno più di due possibili tipologie di giudizi.

La sintesi dei giudizi elementari espressi fino a un certo punto del processo decisionale – rappresentata dal giudizio accumulato – verrà effettuata sulla base di una funzione di

accumulazione che, per esempio, può corrispondere alla somma delle realizzazioni delle v.c. che esprimono i giudizi elementari espressi fino a un dato momento (Manisera e Zuccolotto, 2014b).

Infine, i giudizi provvisori formulati alla fine di ciascuno dei passi del percorso di *feeling*, dipenderanno dalla funzione di “*likertizzazione*” e dunque dalla tipologia di supporto discreto che caratterizza la scala ordinale di risposta. Se, per esempio, le alternative di risposta saranno rappresentate dai numeri naturali tra 1 e  $m$ , i giudizi accumulati verranno trasformati in un giudizio provvisorio pari a uno dei numeri rientranti in tale intervallo.

A partire dalla presente formulazione generale del processo decisionale di risposta – scegliendo una certa variabile casuale associata ai giudizi elementari, una funzione di accumulazione e una di *likertizzazione* – è possibile ottenere un determinato modello statistico di analisi dei dati ordinali. In questo modo è possibile ricostruire un modello già esistente, come il CUB senza *covariate* (D’Elia e Piccolo, 2005), ed è possibile elaborare anche un nuovo modello, come è avvenuto nel caso del NLCUB (Manisera e Zuccolotto, 2014b) e del CUM (Manisera e Zuccolotto, 2022).

### 3.1.2. Il modello CUB come caso particolare del modello generale

Il modello CUB può essere ricavato dallo schema generale del processo decisionale ipotizzando che: ogni giudizio elementare ( $x_t$ ) segua una distribuzione di Bernoulli, che la funzione di accumulazione ( $f$ ) sia rappresentata dalla somma, che quella di *likertizzazione* ( $d$ ) aumenti di un’unità il giudizio accumulato (per fare in modo che ci sia coerenza con la scala ordinale), e che il numero di step del percorso di *feeling* sia pari a  $T = m - 1$ .

I giudizi elementari relativi alle singole occasioni in cui si è sperimentato il tratto latente oggetto di analisi corrisponderanno alle realizzazioni ( $x_t$ ) di una variabile casuale di Bernoulli ( $X_t$ ), il cui parametro che esprime la probabilità di successo corrisponde a  $1 - \xi$  (Manisera e Zuccolotto, 2014b); formalmente si avrà quindi che  $X_t \sim B(1 - \xi)$ .<sup>45</sup> Il giudizio elementare di tipo “positivo” sarà rappresentato dal valore “1” generato dalla v.c.  $X_t$ , cioè corrisponderà al verificarsi dell’evento “successo”, che avviene con probabilità pari a  $(1 - \xi)$ . Al contrario, con probabilità  $\xi$  si verificherà l’evento “insuccesso”, rappresentato dal valore “0”, che corrisponderà a un giudizio elementare di tipo “negativo”. In particolare,  $(1 - \xi)$  rappresenta

---

<sup>45</sup> La funzione di massa di probabilità della variabile casuale di Bernoulli  $X_t$  sarà quindi data da:  $P(X_t = x_t) = (1 - \xi)^{x_t} \cdot \xi^{1-x_t}$ ; dove  $x_t = \{0,1\}$  rappresenta il supporto della variabile casuale  $X_t$ .

il parametro di *feeling* del modello CUB e corrisponde alla probabilità di successo in ciascuno dei confronti appaiati tra le alternative di risposta; nel presente schema concettuale  $(1 - \xi)$  esprime la probabilità di ottenere un giudizio elementare favorevole nel  $t$ -esimo passo del processo di *feeling* (Manisera e Zuccolotto, 2014b). Si può quindi considerare che il rispondente parta dalla prima alternativa della scala di risposta e, a ogni step, si sposti all'alternativa immediatamente superiore nel caso in cui venga formulato un giudizio positivo, il che si verifica con una probabilità pari a  $1 - \xi$ .

I giudizi elementari – positivi (quando  $x_i = 1$ ) o negativi (quando  $x_i = 0$ ) – che sono stati formulati fino a un certo step  $t$  del processo decisionale, vengono accumulati sommando i valori a essi associati; la somma di  $t$  variabili di Bernoulli dà quindi origine a una v.c. Binomiale caratterizzata dai parametri  $t$ , per il numero complessivo di prove effettuate, e  $(1 - \xi)$ , per la probabilità di successo (Manisera e Zuccolotto, 2014b). Il giudizio accumulato relativo a un certo step  $t$  (indicato con  $w_t$ ) corrisponde quindi al numero di giudizi elementari positivi che sono stati espressi nei  $t$  passi effettuati fino a quel momento;  $w_t$  è quindi il valore derivante dalla v.c. Binomiale  $W_t \sim Bin(t, 1 - \xi) = \sum_{i=1}^t B(1 - \xi)$ , che corrisponde alla somma di  $t$  v.c. di Bernoulli indipendenti (Manisera e Zuccolotto, 2014b) e che è caratterizzata da un supporto  $w_t = \{0, 1, \dots, t\}$ . Quando ci si trova in un certo step  $t$  del percorso di *feeling*, la probabilità che il rispondente abbia formulato un numero  $w_t$  di giudizi elementari positivi è data da:  $P(W_t = w_t) = \binom{t}{w_t} \cdot (1 - \xi)^{w_t} \cdot \xi^{t-w_t}$ .

Il giudizio accumulato deve poi essere trasformato, mediante la funzione di “*likertizzazione*”, nel giudizio provvisorio  $r_t$ , espresso in un formato compatibile con la scala di misurazione ordinale, le cui alternative vanno da 1 a  $m$  – dove  $m$  rappresenta il valore dell'ultima alternativa di risposta, oltre a esprimere il numero totale di categorie presenti. Il giudizio provvisorio  $r_t$  ottenuto alla fine di ogni step  $t$  si ottiene aggiungendo 1 al giudizio accumulato ( $w_t$ ); si ha quindi che  $r_t = (w_t + 1)$ . Pertanto, i giudizi provvisori  $r_t$  corrispondono alle realizzazioni di una v.c.  $R_t$  che si distribuisce come una Binomiale traslata, caratterizzata dai parametri  $t + 1$ , per il numero totale di prove, e  $(1 - \xi)$ , per la probabilità di successo (Manisera e Zuccolotto, 2014b). Il supporto di  $R_t$  risulta quindi pari a  $r_t = \{1, 2, \dots, t + 1\}$  e quindi, anziché partire da 0 – come avviene per la v.c. associata ai giudizi accumulati – il primo valore del supporto risulta pari a 1. Una volta che si arriva alla fine del percorso di *feeling*, cioè

quando ci si trova all'ultimo step  $T$ , la variabile  $R_T$  potrà assumere valori  $r_T = \{1, 2, \dots, T+1\}$ , il che significa che il suo supporto parte da 1 e arriva fino a  $m$  e dunque l'ultimo giudizio provvisorio sarà compatibile con la scala ordinale impiegata.<sup>46</sup>

Nello schema generale del processo decisionale si considera che la scelta provvisoria del rispondente all'inizio del percorso di *feeling* ricada sulla prima alternativa di risposta della scala ordinale – ossia quella più bassa. Quando, in uno step del percorso di *feeling*, viene formulato il primo giudizio elementare positivo, la scelta provvisoria del rispondente si sposta in corrispondenza della seconda categoria, e così via fino ad arrivare, eventualmente, all'ultima alternativa della scala ( $m$ ) – nel caso in cui tutti i giudizi elementari formulati siano positivi.<sup>47</sup> Il numero totale di passi del processo di *feeling* ( $T$ ) corrisponde quindi al numero di giudizi elementari positivi che devono essere espressi affinché la scelta del rispondente passi dalla prima alternativa di risposta all'ultima categoria ( $m$ ). Tale numero corrisponde proprio a  $m - 1$ , per questo, come specificato in precedenza, nel caso del modello CUB si ha che  $T = m - 1$  (Manisera e Zuccolotto, 2015).

Una volta che il percorso di *feeling* viene completato, l'ultimo giudizio provvisorio ( $r_T$ ) rappresenta la categoria che il rispondente sceglierebbe qualora, nel processo decisionale, non entrasse anche la componente di incertezza. La variabile casuale  $R_T$  – le cui possibili realizzazioni  $r_T = \{1, 2, \dots, T + 1\}$  rappresentano i possibili giudizi “finali” che possono essere formulati a seguito dei  $T$  passi del percorso di *feeling* – si distribuisce come una Binomiale traslata di un'unità sul suo supporto. La sua funzione di massa di probabilità – che esprime la probabilità che ciascun giudizio “finale”  $r_T$  ha di essere scelto dal rispondente a seguito della sola componente di *feeling* – risulta la seguente<sup>48</sup>:

$$P(R_T = r_T) = \binom{T}{r_T - 1} \cdot (1 - \xi)^{r_T - 1} \cdot \xi^{T+1-(r_T - 1)}.$$

<sup>46</sup> Questo deriva dal fatto che nel modello CUB, come anticipato, il numero totale di passi del percorso di *feeling* ( $T$ ) corrisponde al numero di categorie ( $m$ ) ridotto di 1, (Manisera e Zuccolotto, 2015).

<sup>47</sup> Nel modello CUB originario (D'Elia e Piccolo, 2005) è sufficiente un giudizio elementare affinché la scelta (provvisoria) del rispondente si sposti verso l'alternativa di risposta immediatamente successiva a quella in cui ci si trova (Manisera e Zuccolotto, 2015). Lo schema concettuale generale del processo decisionale consente però di estendere il modello originario, dando origine al CUB Non Lineare (NLCUB), nel quale per passare da una categoria alla successiva può essere necessario un numero superiore di giudizi elementari positivi, che può essere diverso per le varie categorie (Manisera e Zuccolotto, 2014b).

<sup>48</sup> Come già analizzato nel Capitolo 2 (cfr. Par 2.3.1.), la probabilità che una v.c. Binomiale traslata generi un certo valore (in questo caso  $r_T$ ) su un certo numero di prove totali (qui pari a  $T + 1$ ), equivale alla probabilità di una Binomiale non traslata di ottenere un successo in meno (ossia  $r_T - 1$ ) su un numero di prove pari a  $(T + 1) - 1 = T$ .

Siccome  $T = m - 1$ , la funzione di probabilità della Binomiale traslata (relativa al percorso di *feeling* completo) può essere riscritta come:  $P(R_T = r_T) = \binom{m-1}{r_T-1} \cdot (1 - \xi)^{r_T-1} \cdot \xi^{m-r_T}$ .

Si tratta esattamente della funzione di massa di probabilità della componente di *feeling* del modello CUB originario (D’Elia e Piccolo, 2005), che andrà combinata con la v.c. Uniforme discreta rappresentativa della componente di incertezza, utilizzando gli opportuni pesi che sono, rispettivamente,  $\pi$  e  $(1 - \pi)$ . In questo modo, a partire dallo schema generale del processo decisionale e sulla base delle opportune ipotesi (riassunte in Tabella 3.2.) effettuate a riguardo della distribuzione dei giudizi elementari, della funzione di accumulazione e di “*likertizzazione*”, è possibile ottenere la funzione di probabilità della variabile casuale CUB:

$$P(R = r) = \pi \cdot \binom{m-1}{r-1} \cdot (1 - \xi)^{r-1} \cdot \xi^{m-r} + (1 - \pi) \cdot \frac{1}{m}, \text{ per } r = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Tabella 3.2. – Ipotesi formulate riguardo agli elementi del percorso di *feeling* per ricavare il modello CUB dallo schema generale del processo decisionale.

Fonte: Nostra elaborazione, sulla base di Manisera e Zuccolotto, 2014b.

Elementi del percorso di <i>feeling</i>	Variabile casuale associata	Supporto della v.c.	Funzione di massa di probabilità della v.c.
Giudizi elementari	$X_t \sim B(1 - \xi)$	$x_t \in \{0, 1\}$	$P(X_t = x_t) = (1 - \xi)^{x_t} \cdot \xi^{1-x_t}$
<i>Funzione di accumulazione</i> $f(x_i) = \sum_{i=1}^t x_i$ , per ottenere $w_t = \sum_{i=1}^t x_i$			
Giudizi accumulati	$W_t \sim Bin(t, 1 - \xi)$	$w_t = f(x_t) \in \{0, 1, \dots, t\}$	$P(W_t = w_t) = \binom{t}{w_t} \cdot (1 - \xi)^{w_t} \cdot \xi^{t-w_t}$
<i>Funzione di “likertizzazione”</i> $d(w_t) = w_t + 1$ , per ottenere $r_t = w_t + 1$			
Giudizi provvisori	$R_t \sim ShiftBin(t, 1 - \xi)$	$r_t = d(w_t) \in \{1, 2, \dots, t + 1\}$	$P(R_t = r_t) = \binom{t}{r_t-1} \cdot (1 - \xi)^{r_t-1} \cdot \xi^{t-r_t}$

### 3.1.3. Il processo decisionale del modello CUM

Partendo dallo schema generale del processo psicologico di risposta a una scala ordinale è possibile ricavare – formulando specifiche ipotesi sugli elementi del percorso di *feeling* – un nuovo modello statistico – denominato CUM (Manisera e Zuccolotto, 2022) – che è stato pensato specificamente per i dati raccolti su scale a differenziale semantico. In realtà, il modello CUM risulta adatto per analizzare le risposte fornite su tutte le scale ordinali che presentano un numero dispari di categorie, di cui quella centrale esprime una percezione di neutralità rispetto all’aspetto indagato (Manisera e Zuccolotto, 2022). Anche per questa tipologia di scale – come avviene in presenza di scale a differenziale semantico – si può ritenere che il processo

decisionale dei rispondenti prenda avvio dalla categoria centrale della scala, a partire dalla quale la persona deciderà se spostarsi verso giudizi più elevati o se, invece, orientarsi verso giudizi più bassi (Manisera e Zuccolotto, 2022).

Per questo motivo, nel modello CUM si considera, anzitutto, che i giudizi elementari possano essere di tre tipologie diverse: giudizi che porteranno a far scegliere la categoria superiore (tipicamente posizionata sulla destra) che potrebbero essere indicati come giudizi “positivi”, quelli che faranno invece scegliere la modalità inferiore (quindi a sinistra) che possono essere definiti come giudizi “negativi”, e quelli “neutri”, che non faranno cambiare l’alternativa di risposta già scelta sulla base dei giudizi precedenti.

La variabile casuale associata a questi giudizi elementari sarà quindi una v.c. Multinoulli – anche nota come Catoriale – (Manisera e Zuccolotto, 2022), che rappresenta una “prova” che può dare luogo a tre tipologie diverse di esiti, uno negativo, uno positivo e uno neutro, ognuno dei quali si verifica con una certa probabilità che è indicata, rispettivamente, con  $\xi_D$ ,  $\xi_U$  e  $1 - \xi_D - \xi_U$ .<sup>49</sup>

Anche per il modello CUM, analogamente al caso del CUB originario, il processo decisionale è di tipo additivo, quindi la funzione di accumulazione che può essere impiegata per accumulare i giudizi elementari espressi fino a un certo step  $t$  del percorso di *feeling* è rappresentata dalla somma (Manisera e Zuccolotto, 2022). Pertanto, i giudizi accumulati corrispondono alle realizzazioni di una v.c. Multinomiale – che viene generata sommando più variabili Multinoulli indipendenti – caratterizzata dai parametri  $t$ , per il numero di prove, e  $(\xi_D, \xi_U)$ , rispettivamente per la probabilità di scendere e di salire di una categoria rispetto a quella corrispondente alla scelta provvisoria del rispondente (Manisera e Zuccolotto, 2022).

I giudizi accumulati devono poi essere trasformati in giudizi provvisori, tramite la funzione di “*likertizzazione*”. Il numero dei giudizi elementari negativi, positivi e neutri viene moltiplicato rispettivamente per i valori  $-1$ ,  $1$  e  $0$ ; i tre valori così ottenuti vengono poi sommati e, infine, viene effettuata una traslazione per portare il punto di partenza al centro della scala (Manisera e

---

<sup>49</sup> Le lettere poste al pedice delle diverse probabilità si riferiscono alla direzione verso la quale un certo giudizio porta a spostarsi. “D” significa “*down*”, quindi  $\xi_D$  rappresenta la probabilità che un giudizio elementare sia “negativo”, ossia faccia spostare la decisione provvisoria alla categoria inferiore; “U” deriva da “*up*”, dunque  $\xi_U$  esprime la probabilità che il giudizio elementare sia “positivo”, ovvero faccia ricadere la scelta provvisoria sull’alternativa superiore (Manisera e Zuccolotto, 2022). Infine,  $1 - \xi_D - \xi_U$  rappresenta la probabilità che la decisione provvisoria non si sposti né alla categoria precedente né a quella successiva; l’evento a cui tale probabilità è associata è quindi quello di “restare fermi” (quindi in inglese corrisponderebbe a “*stay*”) in corrispondenza della categoria verso la quale la scelta provvisoria era già orientata (Manisera e Zuccolotto, 2022).

Zuccolotto, 2022). In questo modo, l'ultimo giudizio provvisorio deriverà da una variabile casuale il cui supporto risulterà coerente con la scala di misurazione, cioè il primo valore del supporto corrisponderà a "1" e l'ultimo a "m".

Sulla base della v.c. associata all'ultimo giudizio provvisorio, sarà possibile ottenere la probabilità che ciascuna categoria di risposta ha di essere scelta in base alla componente di *feeling*. Combinando questa probabilità con quella derivante dalla variabile casuale Uniforme discreta – che consente di tenere conto dell'incertezza nella risposta – si otterrà la distribuzione di probabilità associata al modello CUM. Esso consentirà di descrivere le risposte raccolte su una scala a differenziale semantico, fornendo informazioni sul peso delle due componenti latenti di *feeling* e di incertezza e, soprattutto, indicando quale sia la propensione (e dunque il *feeling*) dei rispondenti a spostarsi dalla categoria centrale verso giudizi superiori e verso quelli inferiori.

### 3.2. Percorso di *feeling* del modello CUM

L'elemento che distingue il modello CUM dalla formulazione originaria del CUB (D'Elia e Piccolo, 2005) è rappresentato dal percorso di *feeling*, in quanto le ipotesi effettuate in merito agli elementi che lo costituiscono risultano diverse nei due modelli.

Una prima caratteristica distintiva del *feeling path* relativo al modello CUM è il numero complessivo di passi in cui esso si articola. Nel modello, infatti, si considera che, data una scala ordinale che presenta un numero dispari ( $m$ ) di categorie di risposta, il processo decisionale del rispondente inizi dall'alternativa centrale e si ipotizza che ogni giudizio elementare positivo (o negativo) faccia ricadere la scelta (provvisoria) rispettivamente sulla categoria successiva (o precedente). Il numero totale di step necessari per passare dall'alternativa centrale a uno dei due estremi della scala – nel caso tutti i giudizi fossero positivi o negativi – risulta quindi pari a  $\frac{m-1}{2}$ , cioè al numero totale di categorie della scala, ridotto di un'unità e diviso per due (Manisera e Zuccolotto, 2022). Questo è il valore che nel modello concettuale generale del processo decisionale viene indicato con  $T$ ; nel caso del modello CUM, il numero di passi che formano il percorso di *feeling* può essere indicato con  $k$ , per questo si ha che:  $k = T = \frac{m-1}{2}$ .<sup>50</sup>

---

<sup>50</sup> Invece, nel modello CUB – nel caso in cui esso venga ricavato dallo schema generale del processo psicologico di risposta a una scala ordinale – il numero complessivo di passi che devono essere svolti nel percorso di *feeling* risulta pari a  $T = m - 1$ , perché si considera che all'inizio del processo decisionale la scelta provvisoria del rispondente ricada sulla prima alternativa di risposta; per poter raggiungere l'ultima categoria ( $m$ ) servono quindi  $m - 1$  step (Manisera e Zuccolotto, 2015).

La categoria che occupa la posizione centrale nella scala a differenziale semantico (o nella scala ordinale con un numero dispari di categorie, in cui quella centrale indica neutralità) viene quindi identificata con  $k + 1$  (Manisera e Zuccolotto, 2022). Se il processo decisionale ha avvio in corrispondenza di tale categoria, compiendo un percorso di *feeling* formato da  $k$  passi, nel caso di soli giudizi elementari (che spingono a spostarsi all'alternativa superiore), si raggiungerà l'estremo destro della scala; in presenza di soli giudizi che fanno scendere verso l'alternativa precedente, in  $k$  step la scelta finale ricadrà sull'estremo sinistro della scala a differenziale semantico.

### **3.2.1. I giudizi elementari: la variabile casuale Multinoulli**

La scelta finale dell'alternativa di risposta derivante dalla componente di *feeling* dipende dal tipo di giudizi elementari che vengono formulati dalla mente del rispondente nei  $T = k$  passi del processo decisionale. Tali giudizi, infatti, orientano la scelta provvisoria della risposta che viene determinata alla fine di ciascuno degli step. Per esempio, se il rispondente ricorda un elemento positivo in merito all'aspetto indagato, verrà formulato un giudizio elementare "positivo", che orienterà la scelta provvisoria verso l'alternativa di risposta successiva a quella scelta nello step precedente ( $t - 1$ ). Al contrario, quando il rispondente ricorda un elemento negativo dell'*item* da valutare, la scelta provvisoria ricadrà sulla categoria inferiore a quella individuata a  $t - 1$ . Invece, qualora il rispondente formulasse un giudizio elementare neutrale, l'alternativa scelta nello step precedente verrebbe confermata.

A ciascun giudizio elementare viene associata una variabile casuale che, per il fatto che tali giudizi possono essere di tre tipologie differenti, non può più essere una v.c. di Bernoulli come avviene nel modello CUB originario (Manisera e Zuccolotto, 2014b). Nel modello CUM, la variabile casuale associata a ogni giudizio elementare è una Multinoulli, che può essere anche definita Categoriale (Manisera e Zuccolotto, 2022); tale v.c. rappresenta una prova il cui esito può essere ricondotto a più di due "stati" diversi, a differenza delle prove di tipo Bernoulliano, i cui possibili esiti sono solo dicotomici, ossia possono essere, alternativamente, di tipo "successo" o "insuccesso".

In particolare, ogni giudizio elementare su cui si fonda il modello CUM corrisponde a una prova il cui esito può appartenere a tre stati diversi: il giudizio può portare a scegliere la categoria precedente (con probabilità  $\xi_D$ ), può orientare la decisione provvisoria verso l'alternativa

successiva (con probabilità  $\xi_U$ ), o può non modificare la scelta effettuata nel passo precedente del percorso di *feeling* (Manisera e Zuccolotto, 2022).

La v.c. Multinoulli associata al giudizio elementare formulato a un determinato step  $t$  può essere indicata con  $X_t$  e sarà una variabile casuale discreta multivariata in quanto conterrà tre valori – uno per ciascuno stato che può caratterizzare gli esiti della prova (Manisera e Zuccolotto, 2022). Pertanto, si avrà che  $X_t = [X_{t,D}, X_{t,U}, X_{t,S}]$ , dove  $X_{t,D}$ ,  $X_{t,U}$  e  $X_{t,S}$  si riferiscono, rispettivamente, allo stato “*down*” (ossia il giudizio che porta alla categoria precedente), “*up*” (che orienta verso la categoria successiva) e “*stay*” (in presenza di un giudizio neutro). Ogni possibile realizzazione della v.c. Multinoulli  $X_t$  corrisponderà a un insieme di tre valori  $[x_{t,D}, x_{t,U}, x_{t,S}]$ ; soltanto uno di tali valori risulterà pari a 1, in corrispondenza dello stato che si è verificato, mentre gli altri due valori saranno pari a 0. La probabilità che venga formulato un giudizio “negativo” (ossia che  $x_{t,D} = 1$ ) sarà rappresentata da  $\xi_D$ , la probabilità di ottenere un giudizio “positivo” (rappresentato da  $x_{t,U} = 1$ ) verrà espressa da  $\xi_U$ , e, infine, un giudizio neutro (che porterà a  $x_{t,S} = 1$ ) verrà formulato con probabilità  $\xi_S = 1 - \xi_D - \xi_U$  (Manisera e Zuccolotto, 2022).

La Tabella 3.3. sintetizza le caratteristiche della variabile casuale Multinoulli<sup>51</sup> associata a un giudizio elementare formulato a un generico passo  $t$  del percorso di *feeling*, affrontato quando una persona si trova a rispondere a una scala a differenziale semantico.

Tabella 3.3. – Realizzazioni della variabile casuale Multinoulli associata a un giudizio elementare.  
Fonte: Nostra elaborazione, sulla base di Manisera e Zuccolotto, 2022.

Giudizio elementare $x_t$	v.c. associata: Multinoulli (Categoriale) $X_t \sim Cat(\xi_D, \xi_U, 1 - \xi_D - \xi_U)$ $X_t = [X_{t,D} X_{t,U} X_{t,S}]$ , dove $x_{t,D}, x_{t,S}, x_{t,U} \in \{0,1\}$ e $\xi_D + \xi_U + \xi_S = 1$	
“Negativo”	$x_t = [x_{t,D} x_{t,U} x_{t,S}] = [1, 0, 0]$	Con probabilità $\xi_D$
“Positivo”	$x_t = [x_{t,D} x_{t,U} x_{t,S}] = [0, 1, 0]$	Con probabilità $\xi_U$
“Neutro”	$x_t = [x_{t,D} x_{t,U} x_{t,S}] = [0, 0, 1]$	Con probabilità $\xi_S = 1 - \xi_D - \xi_U$

<sup>51</sup> La variabile casuale Multinoulli richiede che vengano presi in considerazione tutti i possibili stati che possono caratterizzare l’esito di una prova; per questo, le probabilità dei tre stati – oltre a dover essere non negative – sommate dovranno dare esattamente 1. Pertanto, si richiede che:  $\xi_D \geq 0$ ,  $\xi_U \geq 0$ ,  $\xi_S \geq 0$  e che  $\xi_D + \xi_U + \xi_S = 1$ ; quest’ultima ipotesi è garantita dal fatto che  $\xi_S = 1 - \xi_D - \xi_U$ .

### 3.2.2. I giudizi accumulati: la distribuzione Multinomiale

Ai diversi passi del percorso di *feeling* vengono espressi i giudizi elementari che devono essere sintetizzati, per poter poi determinare la scelta dell'alternativa di risposta. Come per il modello CUB, anche nel caso del CUM è possibile utilizzare la somma per “accumulare” i giudizi elementari espressi fino a un certo step  $t$  del processo decisionale (Manisera e Zuccolotto, 2022). In questo modo, si ottiene una variabile casuale Multinomiale, data dalla somma di un certo numero ( $t$ ) di v.c. Multinoulli indipendenti, relative ai giudizi elementari espressi fino allo step  $t$  (Manisera e Zuccolotto, 2022). Le realizzazioni della v.c. Multinomiale corrispondono a dei vettori, contenenti tanti elementi quanti sono gli stati che possono caratterizzare gli esiti di ciascuna delle  $t$  prove (Kroese e Chan, 2014, p. 68); nel caso del modello CUM, quindi, il vettore contiene tre valori. Ognuno di questi elementi indica il numero di volte in cui ciascuna delle tre tipologie di esiti si è verificata, su un totale di  $t$  “prove”, ossia rappresenta il numero di giudizi elementari espressi fino a quel momento (Manisera e Zuccolotto, 2022).

Ogni giudizio accumulato relativo a un certo step  $t$  corrisponde quindi a una variabile casuale Multinomiale<sup>52</sup> caratterizzata dai parametri  $t$ , per il numero di prove, e  $\xi_D$ ,  $\xi_U$ ,  $1 - \xi_D - \xi_U$ , che esprimono la probabilità che in una prova – cioè in un giudizio elementare – si verifichi, rispettivamente, lo stato “down”, “up” o “stay” (Manisera e Zuccolotto, 2022).<sup>53</sup> Questa v.c. Multinomiale può essere indicata con  $M_t$  e corrisponde a un vettore di tre elementi, ognuno dei quali indica il numero di volte in cui, nelle  $t$  prove, si è verificato ciascuno dei tre stati; si ha quindi che  $M_t = [M_{t,D} \ M_{t,U} \ M_{t,S}]'$ , dove  $m_{t,D}$ ,  $m_{t,U}$ ,  $m_{t,S} \in \{0, 1, \dots, t\}$  e, in particolare si avrà che  $m_{t,D} + m_{t,U} + m_{t,S} = t$  (Kroese e Chan, 2014). In totale, infatti, i giudizi elementari che vengono accumulati sono un numero  $t$ , perciò, il numero di giudizi negativi, positivi e neutri potrà andare da 0 a  $t$  – rispettivamente nel caso in cui tutti i giudizi elementari siano solo “negativi” o solo “positivi”; in ogni caso, complessivamente, i giudizi delle tre tipologie saranno esattamente  $t$ , visto che per ogni step si considera che venga espresso un solo giudizio elementare.

---

<sup>52</sup> Generalmente, i parametri della v.c. Multinomiale vengono indicati con  $n$  – per il numero di prove indipendenti che vengono svolte, ossia il numero di v.c. Multinoulli che vengono sommate – e  $p_1, p_2, \dots, p_k$  – per le probabilità che ciascuno stato ha di verificarsi (Kroese e Chan, 2014, p. 68).

<sup>53</sup> Anche nel caso della variabile casuale Multinomiale, è richiesto che le probabilità associate ai diversi stati – oltre a essere non negative – sommate siano pari a 1 (Kroese e Chan, 2014); questo indica che sono stati presi in considerazione tutti i possibili stati che possono caratterizzare l'esito di una prova.

La v.c. Multinomiale  $M_t$  sintetizza i giudizi elementari espressi fino a un certo passo  $t$  del processo decisionale, indicando, per ognuna delle tre tipologie possibili, quanti ne sono stati formulati. Questa variabile casuale, tuttavia, non dà ancora informazioni su quale categoria della scala a differenziale semantico rappresenti la scelta (provvisoria) del rispondente; per questo motivo, è necessario che i giudizi accumulati vengano trasformati in giudizi provvisori.

### 3.2.3. I giudizi provvisori: la trasformazione della v.c. Multinomiale

La scelta provvisoria del rispondente, a seguito dell'accumulazione di un certo numero di giudizi elementari, si ottiene procedendo a una trasformazione lineare della distribuzione Multinomiale  $M_t$  che contiene i giudizi accumulati fino allo step  $t$  (Manisera e Zuccolotto, 2022). Questo avviene impiegando una funzione di trasformazione ( $l$ ) – che, nello schema generale del processo decisionale, è denominata “funzione di *likertizzazione*” – il cui obiettivo è quello di far sì che i valori assunti dalla nuova variabile casuale trasformata ( $W_t$ ) vadano da un minimo di 1 a un massimo di  $m$ , così come avviene per le categorie della scala ordinale (Manisera e Zuccolotto, 2022).

Come prima cosa, la funzione  $l$  associa dei valori numerici alle tre diverse tipologie di giudizi elementari, ognuna delle quali si presenta un certo numero di volte (espresso dai giudizi accumulati  $M_t = [M_{t,D} \ M_{t,U} \ M_{t,S}]$ ) nei  $t$  passi del processo decisionale (Manisera e Zuccolotto, 2022). In particolare, il numero di giudizi “negativi” viene moltiplicato per il valore  $-1$ , il numero di quelli “positivi” per valore  $1$  e il numero di quelli “neutri” per il valore  $0$  (Manisera e Zuccolotto, 2022). Inoltre, la funzione di trasformazione effettua una traslazione – verso destra per un valore pari a  $k + 1$  – del supporto della variabile casuale ottenuta sommando i valori negativi, positivi e nulli, ricavati dalle moltiplicazioni svolte in precedenza (Manisera e Zuccolotto, 2022). Questa operazione consente di considerare il fatto che il processo di risposta a una scala a differenziale semantico prende avvio dall'alternativa di risposta centrale, che è esattamente la categoria  $k + 1$ , dato che  $k = \frac{m-1}{2}$ .

La v.c.  $W_t$  associata ai giudizi provvisori (che, per coerenza con lo schema generale del processo decisionale può essere indicata con  $R_t$ ) si distribuisce come una Multinomiale soggetta a una trasformazione lineare (che associa i valori  $[-1 \ 0 \ 1]$ ) e traslata verso destra di  $k + 1$  (Manisera e Zuccolotto, 2022); si ha quindi che:

$$W_t = R_t = [-1 \ 0 \ 1] M_t + (k + 1) = [-1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} M_{t,D} \\ M_{t,U} \\ M_{t,S} \end{bmatrix} + (k + 1).$$

Il primo addendo nella formula di  $W_k$  è rappresentato dal prodotto scalare, che potrebbe essere indicato con  $y_t = [-1 \quad 1 \quad 0] [M_{t,D} \quad M_{t,U} \quad M_{t,S}]'$ . Il risultato di tale operazione è quindi uno scalare che corrisponde alla somma dei prodotti degli elementi che si trovano nella medesima posizione all'interno dei due vettori; si ha quindi che:  $y_t = -1 \cdot M_{t,D} + 1 \cdot M_{t,U} + 0 \cdot M_{t,S}$ .

Il valore risultante dal prodotto scalare ( $y_t$ ) verrà poi sommato a  $k + 1$  e darà origine alla realizzazione  $w_t$  della v.c.  $W_t$ , ossia al giudizio provvisorio relativo allo step  $t$  del percorso di *feeling*.

### 3.2.4. Il giudizio finale derivante dal percorso di *feeling*

Una volta che tutti i  $T = k$  passi del percorso di *feeling* sono stati svolti, anche l'ultimo giudizio elementare viene formulato e viene accumulato insieme a quelli formulati in precedenza; dalla trasformazione della v.c. associata all'ultimo giudizio accumulato ( $M_k = [M_{k,D} \quad M_{k,U} \quad M_{k,S}]$ ), si ottiene la v.c.  $W_k$ , che rappresenta il giudizio finale derivante dalla componente di *feeling*.

La variabile casuale  $M_k$ , infatti, esprime il numero di giudizi elementari negativi ( $m_{k,D}$ ), positivi ( $m_{k,U}$ ) e neutri ( $m_{k,S}$ ), che sono stati formulati nell'intero processo svolto dalla mente del rispondente. Trasformando i valori di  $m_{k,D}$ ,  $m_{k,U}$  e  $m_{k,S}$  (moltiplicandoli per i valori  $-1$ ,  $1$  e  $0$ , sommando i risultati così ottenuti, e aggiungendo  $k + 1$  a tale risultato), si otterrà l'ultimo giudizio provvisorio, corrispondente alla scelta "finale" derivante dalla componente di *feeling*.

In questo modo, è possibile ottenere la rappresentazione matematica del processo logico svolto dalla mente del rispondente che deve valutare un certo aspetto impiegando una scala a differenziale semantico. Prendendo avvio dalla categoria centrale della scala, ci si sposterà verso sinistra un numero di volte pari al numero dei giudizi elementari "negativi" ( $m_{k,D}$ ) che sono stati espressi (che, infatti, vengono moltiplicati per  $-1$ ), ci si sposterà a destra un numero di volte corrispondente al numero  $m_{k,U}$  giudizi "positivi" (moltiplicati per  $1$ ). I giudizi "neutri", essendo moltiplicati per  $0$ , non modificheranno la scelta dell'alternativa di risposta, perché indicheranno di restare fermi un certo numero di volte (indicato da  $m_{k,S}$ ) in corrispondenza della scelta provvisoria determinata sulla base degli altri giudizi elementari. Il giudizio "finale" derivante dalla componente di *feeling* sarà quindi rappresentato da una realizzazione della v.c.

Multinomiale linearmente trasformata  $W_k$ , che si ottiene alla fine del processo di *feeling*:

$$W_k = R_k = [-1 \quad 0 \quad 1] M_k + (k + 1) = [-1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} M_{k,D} \\ M_{k,U} \\ M_{k,S} \end{bmatrix} + (k + 1).$$

Il valore  $w_k$  assunto da questa variabile casuale  $W_k$  – corrispondente al giudizio “finale” discendente dalla componente di *feeling* – viene quindi a dipendere dall’intero percorso di *feeling* presentato in precedenza, le cui caratteristiche principali sono sintetizzate in Tabella 3.4.

Tabella 3.4. – Ipotesi formulate riguardo agli elementi del percorso di *feeling* per ricavare il modello CUM dallo schema generale del processo decisionale.

Fonte: Nostra elaborazione, sulla base di Manisera e Zuccolotto, 2022.

<b>Percorso di <i>feeling</i></b> (ripetuto per $t = \{1, 2, \dots, T\} = \{1, 2, \dots, k\}$ )		
<b>Elementi</b>	<b>Variabile casuale associata</b>	<b>Supporto della v.c.</b>
Giudizi elementari	Multinoulli o Catoriale: $X_t \sim \text{Cat}(\xi_D, \xi_U, 1 - \xi_D - \xi_U)$	$X_t = [X_{t,D} \ X_{t,U} \ X_{t,S}]'$ , dove $x_{t,D}, x_{t,U}, x_{t,S} \in \{0, 1\}$ e $x_{t,D} + x_{t,U} + x_{t,S} = 1$
Funzione di accumulazione additiva: $f(X_i) = \sum_{i=1}^t X_i$ , per ottenere $M_t = \begin{bmatrix} M_{t,D} \\ M_{t,U} \\ M_{t,S} \end{bmatrix}$		
Giudizi accumulati	Multinomiale: $M_t \sim M([t, \xi_D \ \xi_U \ 1 - \xi_D - \xi_U])$	$M_t = [M_{t,D} \ M_{t,U} \ M_{t,S}]'$ , dove $m_{t,D}, m_{t,U}, m_{t,S} \in \{0, 1, \dots, t\}$ e $m_{t,D} + m_{t,U} + m_{t,S} = t$
Funzione di “likertizzazione” $l(M_t) = [-1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} M_{t,D} \\ M_{t,U} \\ M_{t,S} \end{bmatrix} + (k + 1) = y_t + k + 1$ , per ottenere $W_t$		
Giudizi provvisori	Trasformazione lineare della v.c. multinomiale $M_t$ , indicata con $W_t$ $W_t = R_t = [-1 \ 0 \ 1]M_t + (k + 1)$ $= y_t + (k + 1)$	$W_t = \{w_t\}$ , dove $w_t \in \{-t + k + 1, \dots, t + k + 1\}$ in quanto $y_t \in \{-t, \dots, 0, 1, \dots, t\}$ <sup>54</sup>
<b>Ultimo passo del percorso di <i>feeling</i></b> ( $t = T = k$ )		
Giudizio “finale”	È l’ultimo giudizio provvisorio $W_k$ $W_k = R_k = [-1 \ 0 \ 1]M_k + (k + 1)$	$w_k \in \{1, \dots, 2k + 1\}$ ossia $w_k \in \{1, \dots, m\}$ <sup>55</sup>

Il giudizio “finale”  $w_k$ , grazie alla trasformazione lineare dell’ultimo giudizio accumulato  $m_k$ , corrisponderà a una delle categorie  $(1, 2, \dots, m)$  della scala che si desidera analizzare mediante il modello CUM, il cui obiettivo è anzitutto quello di esprimere la probabilità che ciascuna

<sup>54</sup> Il prodotto scalare  $y_t$  può andare da un valore minimo pari  $-t$ , quando tutti i giudizi elementari espressi fino a quel momento sono negativi (e quindi  $m_{t,D} = t$  e  $m_{t,U} = m_{t,S} = 0$ ), fino a un valore massimo pari a  $t$ , quando i giudizi elementari sono tutti positivi (ossia  $m_{t,U} = t$  e  $m_{t,D} = m_{t,S} = 0$ ).

<sup>55</sup> Il giudizio finale derivante dal percorso di *feeling* corrisponderà a una delle  $m$  categorie della scala ordinale perché, per qualsiasi giudizio provvisorio  $w_t$ , vale che  $w_t \in \{-t + k + 1, \dots, t + k + 1\}$ ; l’ultimo giudizio si ha allo step  $t = T = k$ , quindi si ha che  $w_k \in \{-k + k + 1, \dots, k + k + 1\}$ , ossia  $w_k \in \{1, \dots, 2k + 1\}$ . Siccome il numero complessivo di passi che vengono svolti corrisponde al numero di categorie della scala, ridotto di un’unità e diviso per due, vale che  $m = 2T + 1 = 2k + 1$ ; per questo motivo  $w_k \in \{1, \dots, m\}$ .

categoria di risposta ha di essere scelta, sulla base della combinazione della componente di *feeling* e di quella di incertezza.

La funzione di massa di probabilità associata alla variabile casuale Multinomiale trasformata  $W_k$  – espressione del giudizio finale discendente dal percorso di *feeling* – indica la probabilità di ciascuna alternativa di risposta di essere scelta sulla base dell’effettiva percezione dei rispondenti in merito all’aspetto indagato.

Combinando questa probabilità con quella derivante dalla v.c. Uniforme discreta – espressione di una scelta casuale e quindi della componente di incertezza soggettiva – sarà possibile ottenere la funzione di probabilità della variabile casuale associata al modello CUM (Manisera e Zuccolotto, 2022).

### 3.3. Funzione di massa di probabilità della variabile casuale CUM

La variabile casuale CUM risulta dalla combinazione di una v.c. Uniforme discreta e di una Multinomiale linearmente trasformata, i cui pesi, rispettivamente, corrispondono a  $\pi$  e  $1 - \pi$  (Manisera e Zuccolotto, 2022).

Mentre secondo la v.c. Uniforme discreta, la probabilità associata a ciascuna delle  $m$  categorie è pari a  $\frac{1}{m}$ , la probabilità legata alla componente di *feeling* – derivante della v.c. Multinomiale trasformata – varia da una categoria all’altra e corrisponde alla funzione di massa di probabilità della variabile casuale  $W_k$ , associata all’ultimo giudizio provvisorio derivante dal percorso di *feeling* (Manisera e Zuccolotto, 2022).

Per calcolare la probabilità associata a  $W_k$  sarà necessario calcolare anche la funzione di probabilità di  $M_k$ , in quanto  $W_k$  deriva da una trasformazione lineare di  $M_k$  – che corrisponde alla variabile casuale Multinomiale associata all’ultimo giudizio accumulato, ossia quella v.c. che tiene conto di tutti i giudizi elementari espressi nei  $k = T$  step del processo decisionale. Vale infatti che  $W_t = [-1 \ 0 \ 1]M_t + (k + 1)$ , perciò  $W_k = [-1 \ 0 \ 1]M_k + (k + 1)$ .

#### 3.3.1. Funzione di massa di probabilità della variabile $M_k$

La variabile casuale relativa all’ultimo giudizio accumulato ( $M_k = [M_{t,D} \ M_{t,U} \ M_{t,S}]$ , dove  $m_{k,D}, m_{k,U}, m_{k,S} \in \{0, 1, \dots, k\}$  e  $m_{k,D} + m_{k,U} + m_{k,S} = k$ ) si distribuisce come una Multinomiale caratterizzata dai parametri  $k$ , per il numero di prove, e  $\xi_D, \xi_U$  e  $1 - \xi_D - \xi_U$ , per le probabilità che in ciascuna delle prove l’esito corrisponda, rispettivamente, allo stato

“negativo”, “positivo” o “neutro”. La v.c.  $M_k$  indica il numero di volte in cui vengono formulati giudizi elementari negativi ( $m_{k,D}$ ), positivi ( $m_{k,U}$ ) e neutri ( $m_{k,S}$ ) su un totale di  $k$  “prove” – ossia di step del percorso di *feeling*.

La funzione di massa di probabilità di  $M_k$ , esprime la probabilità di ottenere, nell'intero percorso di *feeling*, un certo numero  $m_{k,D}$  di giudizi elementari “negativi”, un numero  $m_{k,U}$  di giudizi “positivi”, e un numero  $m_{k,S}$  di giudizi “neutri”; perciò, la probabilità di  $M_k$ , che può essere indicata con  $p(M_k)$ , corrisponde a  $P(M_{k,D} = m_{k,D}, M_{k,U} = m_{k,U}, M_{k,S} = m_{k,S})$ . Per semplicità, è possibile indicare il numero di giudizi che orientano la scelta verso la parte inferiore della scala con  $m_{k,D} = k_1$  e quelli che la orientano verso la parte superiore con  $m_{k,U} = k_2$ ; di conseguenza, visto che in totale i giudizi delle tre tipologie saranno pari a  $k$ , i rimanenti giudizi “neutri” saranno indicati con  $m_{k,S} = k_3 = k - k_1 - k_2$  (Manisera e Zuccolotto, 2022).

La probabilità associata alla v.c. Multinomiale relativa all'ultimo giudizio accumulato diventa quindi  $p(M_k(k_1, k_2, k_3)) = P(M_{k,D} = k_1, M_{k,U} = k_2, M_{k,S} = k_3 = k - k_1 - k_2)$ . Il valore di  $k_3 = k - k_1 - k_2$  può anche essere omissso dalla notazione (Manisera e Zuccolotto, 2022), in quanto facilmente ricavabile sottraendo dal numero totale di passi del percorso di *feeling* ( $k$ ) il numero dei giudizi “negativi” ( $k_1$ ) e di quelli “positivi” ( $k_2$ ).

La funzione di massa di probabilità della v.c.  $M_k \sim M(k, \xi_D, \xi_U, 1 - \xi_D - \xi_U)$  è data da<sup>56</sup>:

$$p(M_k(k_1, k_2, k - k_1 - k_2)) = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot (k - k_1 - k_2)!} \cdot \xi_D^{k_1} \cdot \xi_U^{k_2} \cdot (1 - \xi_D - \xi_U)^{k - k_1 - k_2}.$$

Prendendo il caso di una scala a differenziale semantico che presenta  $m = 7$  alternative di risposta, il numero complessivo di step del percorso di *feeling* sarà  $k = 3$ , in quanto vale che  $k = T = \frac{m-1}{2} = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ . La funzione di massa di probabilità di  $M_k$  quando  $m = 7$  diventa:

$$p(M_k(k_1, k_2, 3 - k_1 - k_2)) = \frac{3!}{k_1! \cdot k_2! \cdot (3 - k_1 - k_2)!} \cdot \xi_D^{k_1} \cdot \xi_U^{k_2} \cdot (1 - \xi_D - \xi_U)^{3 - k_1 - k_2}.$$

<sup>56</sup> Generalmente, la v.c. Multinomiale si indica con  $X \sim M_k(n, p_1, p_2, \dots, p_k)$ , dove  $k$  rappresenta numero di stati  $i = \{1, 2, \dots, k\}$  in cui si possono presentare gli esiti di ciascuna delle  $n$  prove, e dove  $p_i$  rappresenta la probabilità che si verifichi lo stato  $i$ -esimo in ciascuna prova (Kroese e Chan, 2014). La somma delle probabilità dovrà risultare pari a 1 ( $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ ), cioè dovranno essere considerati tutti gli stati che possono caratterizzare l'esito delle prove; inoltre, le realizzazioni  $x_i$  della v.c.  $X$  – che indicano il numero di volte in cui ciascuno stato si verifica – sommati dovranno corrispondere al numero totale di prove ( $n$ ), cioè dovrà valere che:  $\sum_{i=1}^k x_i = n$ , (Kroese e Chan, 2014).

La funzione di massa di probabilità di  $X$  è rappresentata dalla seguente formula, il cui primo fattore è il coefficiente multinomiale (Kroese e Chan, 2014):  $p(x) = \frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \dots \cdot x_k!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_k^{x_k}$ .

Nel caso dei giudizi accumulati relativi al modello CUM, il numero di stati possibili è pari a 3, mentre “ $k$ ” viene impiegato per indicare il numero totale di prove.

Nel caso di una scala a 5 alternative di risposta, invece, il valore di  $k$  risulterà pari a 2, perciò la funzione di massa di probabilità della variabile casuale Multinomiale  $M_k$  sarà data da:

$$p(M_k(k_1, k_2, 2 - k_1 - k_2)) = \frac{2!}{k_1! \cdot k_2! \cdot (2 - k_1 - k_2)!} \cdot \xi_D^{k_1} \cdot \xi_U^{k_2} \cdot (1 - \xi_D - \xi_U)^{2 - k_1 - k_2}.$$

### 3.3.2. Funzione di massa di probabilità della v.c. $W_k$

La funzione di massa di probabilità della v.c. associata all'ultimo giudizio provvisorio ( $W_k$ ) può essere ottenuta partendo dalle probabilità – indicate da  $M_k$  – di ottenere uno specifico numero  $k_1$  di giudizi elementari “negativi”, che fanno spostare dalla categoria centrale verso sinistra, e un numero  $k_2$  di giudizi “positivi”, che spostano la scelta verso destra (Manisera e Zuccolotto, 2022).

La probabilità che una certa categoria di risposta  $r$  ha di essere scelta, infatti, equivale alla probabilità che, nell'intero percorso di *feeling*, venga formulato esattamente quel numero di giudizi “negativi” ( $k_1$ ) e “positivi” ( $k_2$ ) che – partendo dall'alternativa di risposta centrale (corrispondente a  $k + 1$ ) – consentono di arrivare alla categoria  $r$  della scala a differenziale semantico.

Per le categorie “1” e “ $m$ ” – corrispondenti ai due estremi di questa tipologia di scale ordinali – esiste una sola combinazione possibile di valori ( $k_1, k_2, k_3$ ) che garantisce che, partendo dalla categoria  $k + 1$ , la scelta finale derivante dalla componente di *feeling* possa ricadere su uno dei due estremi della scala. In particolare, il polo di sinistra verrà raggiunto quando tutti i giudizi elementari formulati sono “negativi” e cioè quando vale che  $k_1 = k$  (dove  $k$  indica il numero di passi del percorso di *feeling*) mentre  $k_2 = 0$  (così come varrà 0 anche  $k_3 = k - k_1 - k_2$ ); la scelta ricadrà invece sull'estremo destro in presenza di soli giudizi elementari “positivi”, cioè quando  $k_2 = k$  (e quindi  $k_1 = k_3 = 0$ ).

Per le categorie intermedie della scala a differenziale semantico, invece, più combinazioni diverse dei valori ( $k_1, k_2, k_3$ ) potrebbero portare a raggiungere la medesima alternativa di risposta  $r$ ; oltre a valere che  $-k_1 + k_2 = r$ , dovrà anche essere rispettato il vincolo richiesto dalla v.c. Multinomiale<sup>57</sup> secondo cui  $k_1 + k_2 + k_3 = k$ . In una scala a differenziale semantico con  $m$  alternative di risposta, infatti, il percorso di *feeling* – secondo quanto ipotizzato dal

---

<sup>57</sup> Se la v.c. Multinomiale che restituisce i valori di  $k_1, k_2$  e  $k_3$  indica il numero di volte in cui è stato formulato un giudizio elementare di una certa tipologia su un totale di  $k$  “prove”, dovrà verificarsi che la somma delle realizzazioni della variabile casuale corrisponda esattamente al numero delle prove, ossia di step del percorso di *feeling*.

modello CUM (Manisera e Zuccolotto, 2022) – sarà costituito da  $k$  passi, in ognuno dei quali verrà formulato un giudizio elementare.

Considerare il caso di una scala a differenziale semantico con 7 alternativa di risposta (in cui, essendo  $m = 7$ , si ha che  $k = T = 3$ ) consente di comprendere meglio il modo in cui è possibile ricavare la funzione di massa di probabilità della v.c. Multinomiale (trasformata linearmente) che è associata al giudizio finale derivante dalla componente di *feeling*. La funzione di massa di probabilità della v.c.  $W_k$  – che nel caso specifico di scale a 7 categorie sarà indicata con  $W_3$  (siccome  $k = 3$ ) – risulta quella rappresentata nella Tabella 3.5, dove  $M_3$  esprime la probabilità, derivante dalla v.c. Multinomiale, di ottenere una specifica combinazione di valori  $(k_1, k_2, k_3)$  – espressione del numero di giudizi elementari “negativi”, “positivi” e “neutri” formulati.

Tabella 3.5. – Funzione di massa di probabilità di  $W_k$  nel caso di una scala a 7 categorie.

Fonte: Manisera e Zuccolotto, 2022.

<b>Funzione di massa di probabilità di <math>W_k = W_3</math></b> $P(R = r) = P(W_3 = r), \quad r = \{1, 2, \dots, m\} = \{1, 2, \dots, 7\}$
$P(R = 1) = P(W_3 = 1) = M_3(3, 0, 0)$
$P(R = 2) = P(W_3 = 2) = M_3(2, 0, 1)$
$P(R = 3) = P(W_3 = 3) = M_3(1, 0, 2) + M_3(2, 1, 0)$
$P(R = 4) = P(W_3 = 4) = M_3(0, 0, 3) + M_3(1, 1, 1)$
$P(R = 5) = P(W_3 = 3) = M_3(0, 1, 2) + M_3(1, 2, 0)$
$P(R = 6) = P(W_3 = 2) = M_3(0, 2, 1)$
$P(R = 7) = P(W_3 = 7) = M_3(0, 3, 0)$

La combinazione più intuitiva dei valori  $(k_1, k_2, k_3)$  consiste nello scendere (o salire) dalla categoria centrale  $k + 1$  (che in questo caso corrisponde al valore “4”) esattamente il numero di volte che consente di arrivare all’alternativa di risposta  $r$  che si vuole raggiungere; una volta fatto questo, l’eventuale numero di passi che mancano per raggiungere il valore di  $k = 3$  dovrà corrispondere a giudizi “neutri”, che non andranno ad alterare la risposta a cui si è arrivati con gli altri giudizi “negativi” (o “positivi”).

In questo modo, è possibile ottenere la probabilità che l’alternativa scelta secondo la componente di *feeling* sia la prima, la seconda, la sesta o la settima. Nel caso della categoria “1” e “7” i 3 passi a disposizione verranno impiegati, rispettivamente, per scendere e per salire

dalla modalità centrale (“4”) di tre categorie; per questo la probabilità di ottenere tali risposte risulterà, rispettivamente, pari a  $P(R = 1) = P(W_3 = 1) = M_3(3, 0, 0)$ , per la prima categoria, e pari a  $P(R = 7) = P(W_3 = 7) = M_3(0, 3, 0)$  per l’ultima alternativa di risposta. Relativamente alla seconda e alla sesta categoria, invece, saranno necessari due soli passi per raggiungerle a partire dall’alternativa di risposta centrale ( $k + 1 = “4”$ ); per questo motivo, lo step rimanente dovrà prevedere la formulazione di un giudizio “neutro”, affinché la risposta finale discendente dal percorso di *feeling* ricada proprio sulla seconda o sulla sesta categoria.

La scelta “finale” può ricadere sulle alternative di risposta più centrali anche in presenza di una combinazione di valori  $(k_1, k_2, k_3)$  diversa da quella, più intuitiva, che prevede che si scenda (o salga) finché non si arriva all’alternativa desiderata, per poi restare fermi i restanti step del processo decisionale.

Per esempio, nel caso della terza e della quinta categoria, la combinazione di valori più intuitiva prevede che un solo giudizio elementare sia negativo (per  $R = 3$ ) – o positivo, per  $R = 5$  – e che, invece, i due giudizi rimanenti siano entrambi “neutri”. Le alternative “3” e “5”, però, potrebbero essere scelte anche in una situazione diversa, caratterizzata, rispettivamente, da due giudizi negativi e uno positivo (per  $R = 3$ ), e da due giudizi elementari positivi e uno solo negativo (nel caso di  $R = 5$ ). La probabilità che la risposta derivante dalla componente di *feeling* corrisponda alla terza o alla quinta categoria della scala a differenziale semantico è data dalla somma<sup>58</sup> delle probabilità associate alle due combinazioni di valori  $(k_1, k_2, k_3)$  che possono condurre il rispondente al medesimo giudizio “finale”. Pertanto, risulta che  $P(R = 3) = P(W_3 = 3) = M_3(1, 0, 2) + M_3(2, 1, 0)$  e  $P(R = 5) = P(W_3 = 5) = M_3(0, 1, 2) + M_3(1, 2, 0)$ .

La probabilità che la risposta finale derivante dalla componente di *feeling* ricada sulla categoria centrale della scala (“4”), invece, corrisponde alla probabilità che vengano generati solamente giudizi “neutri” – in modo che non ci si sposti mai dall’alternativa centrale da cui il processo decisionale prende avvio – sommata alla probabilità di ottenere, nei tre step del percorso di

---

<sup>58</sup> Per ottenere la categoria  $r$  – che in questo caso corrisponde a “3” o a “5” – sarà necessario che i giudizi accumulati corrispondano alla prima combinazione di valori oppure alla seconda; per questo, dal punto di vista del calcolo delle probabilità, verrà effettuata la somma delle probabilità di ottenere l’una o l’altra combinazione di valori  $(k_1, k_2, k_3)$ .

*feeling*, esattamente un giudizio di ciascuna delle tre tipologie – che farebbero scendere di una categoria, salire una volta e poi rimanere una volta fermi. Pertanto, vale che:  
 $P(R = 4) = P(W_3 = 4) = M_3(0, 0, 3) + M_3(1, 1, 1)$ .

La funzione di massa di probabilità della v.c. Multinomiale (linearmente trasformata) che rappresenta l'ultimo giudizio provvisorio derivante dal percorso di *feeling* può essere ricavata, analogamente al caso di  $m = 7$ , per qualsiasi altra scala ordinale che presenta un numero dispari di alternative di risposta. Ad esempio, la Tabella 3.6. riporta la probabilità di ottenere una certa risposta  $r$  in una scala a differenziale semantico composta da 5 categorie.

Tabella 3.6. – Funzione di massa di probabilità di  $W_k$  nel caso di una scala a 5 categorie.  
 Fonte: Nostra elaborazione, sulla base di Manisera e Zuccolotto, 2022.

<b>Funzione di massa di probabilità di <math>W_k = W_2</math></b> $P(R = r) = P(W_2 = r), r = \{1, 2, \dots, m\} = \{1, 2, \dots, 5\}$
$P(R = 1) = P(W_2 = 1) = M_2(2, 0, 0)$
$P(R = 2) = P(W_2 = 2) = M_2(1, 0, 1)$
$P(R = 3) = P(W_2 = 3) = M_2(0, 0, 2) + M_2(1, 1, 0)$
$P(R = 4) = P(W_2 = 4) = M_2(0, 1, 1)$
$P(R = 5) = P(W_2 = 5) = M_2(0, 2, 0)$

La funzione di massa di probabilità del caso di  $m = 5$  si può ottenere da un ragionamento analogo a quello appena presentato per una scala a 7 categorie; la differenza principale sta nel fatto che, in totale, i passi dal percorso di *feeling* saranno due ( $k = T = \frac{m-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$ ).

In presenza di due giudizi elementari entrambi negativi, a partire dalla categoria centrale (che sarà  $k + 1 = 3$ ) la scelta finale derivante dalla componente di *feeling* ricadrà sulla prima alternativa di risposta; in caso di due giudizi positivi, invece, sarà la quinta categoria ad essere scelta. La seconda alternativa di risposta verrà scelta quando uno dei due giudizi elementari formulati nel percorso di *feeling* è “negativo” mentre l’altro è di tipo “neutro”; al contrario, quando in presenza di un giudizio “positivo” e di uno “neutro” la scelta derivante dal *feeling* del rispondente ricadrà sulla quarta categoria. L’alternativa di risposta centrale della scala a 5 modalità, invece, verrà scelta sia in presenza di due giudizi elementari entrambi di tipo “neutro”, sia quando un giudizio elementare è “negativo” e l’altro risulta “positivo”.

### 3.3.3. Combinazione della componente di *feeling* e di incertezza

Una volta calcolata la funzione di massa di probabilità associata al giudizio “finale” derivante dal percorso di *feeling*, è possibile ottenere la distribuzione di probabilità del modello CUM come combinazione lineare convessa della v.c. Multinomiale linearmente trasformata – associata alla componente di *feeling* – e della v.c. Uniforme discreta – rappresentativa della componente di incertezza soggettiva (Manisera e Zuccolotto, 2022). Nella v.c. ottenuta dalla combinazione delle due componenti latenti, i pesi associati alle due distribuzioni saranno, rispettivamente,  $\pi$  per la Multinomiale e  $1 - \pi$  per l’Uniforme discreta (Manisera e Zuccolotto, 2022).

La funzione di massa di probabilità della variabile casuale associata al modello CUM può essere rappresentata dalla seguente formula (Manisera e Zuccolotto, 2022):

$$p(r) = P(R = r ; \pi, \xi_D, \xi_U) = \pi \cdot W_k(r ; \xi_D, \xi_U) + (1 - \pi) \cdot U(m) \quad (3.1).$$

Il termine  $W_k(r ; \xi_D, \xi_U)$  esprime la probabilità che una certa alternativa di risposta  $r$  ha di essere scelta sulla base del percorso di *feeling*, quindi corrisponde alla funzione di massa di probabilità della v.c. Multinomiale linearmente trasformata  $W_k$  relativa all’ultimo giudizio provvisorio.  $U(m)$ , invece, rappresenta la funzione di massa di probabilità della v.c. Uniforme discreta, che – per ciascuna alternativa di risposta – è data dal valore di  $\frac{1}{m}$ ; sostituendo questo valore nella formula (3.1.), la funzione di massa di probabilità della v.c. CUM diventa:

$$p(r) = P(R = r ; \pi, \xi_D, \xi_U) = \pi \cdot W_k(r ; \xi_D, \xi_U) + (1 - \pi) \cdot \frac{1}{m} \quad (3.2).^{59}$$

I parametri che caratterizzano la funzione di massa di probabilità del modello CUM risultano quindi:  $\pi$ ,  $\xi_D$  e  $\xi_U$ , mentre il valore  $m$ , essendo il numero di categorie che presenta la scala a differenziale semantico da analizzare, è noto in base alla tipologia di scala impiegata; sulla base del valore di  $m$  è possibile calcolare anche il valore di  $k = \frac{m-1}{2}$ .

<sup>59</sup> La probabilità di  $W_k$  si calcola a partire dalla funzione di massa di probabilità della Multinomiale  $M_k$  che sintetizza – accumulandoli – i giudizi elementari formulati nell’intero percorso di *feeling*; eventualmente, la probabilità che  $W_k$  generi una specifica categoria  $r$  può corrispondere a più probabilità associate a  $M_k$  sommate tra loro.

Si potrebbe quindi pensare di rappresentare la probabilità  $W_k(r ; \xi_D, \xi_U)$  come la sommatoria – per  $j(r)$  che va da 1 a  $J(r)$  – delle probabilità  $P(M_k = [k_1, k_2, k_3])$ , dove  $J(r)$  indica il numero di combinazioni di valori  $[k_1, k_2, k_3] = [k_1, k_2, k - k_1 - k_2]$  che generano un giudizio finale corrispondente alla categoria  $r$ .

La funzione di massa di probabilità della v.c. CUM così ottenuta risulterebbe la seguente:

$$p(r) = \pi \cdot \left[ \sum_{j(r)=1}^{J(r)} \frac{k!}{k_{1j(r)}! \cdot k_{2j(r)}! \cdot (k - k_{1j(r)} - k_{2j(r)})!} \cdot \xi_D^{k_{1j(r)}} \cdot \xi_U^{k_{2j(r)}} \cdot (1 - \xi_D - \xi_U)^{k - k_{1j(r)} - k_{2j(r)}} \right] + \frac{(1 - \pi)}{m}.$$

### 3.4. I parametri del modello CUM

Analogamente al modello CUB (D’Elia e Piccolo, 2005), anche nella variabile casuale CUM il parametro  $\pi$  rappresenta il peso della componente di *feeling* nel processo psicologico di risposta a una scala a differenziale semantico (Manisera e Zuccolotto, 2022).

I parametri  $\xi_D$  e  $\xi_U$ , invece, rappresentano la probabilità che un giudizio elementare sia, rispettivamente, di tipo “negativo” – ossia, suggerisca di spostarsi verso sinistra (o verso il basso) rispetto alla categoria che attualmente corrisponde alla scelta provvisoria – o di tipo “positivo” – indicando di spostarsi verso destra (o verso l’alto). Pertanto,  $\xi_D$  e  $\xi_U$  esprimono l’intensità del *feeling* del rispondente rispetto al fatto di spostarsi – a partire dalla categoria centrale – verso la parte sinistra o destra della scala a differenziale semantico (Manisera e Zuccolotto, 2022).

#### 3.4.1. Il parametro di incertezza $1 - \pi$

Nella funzione di massa di probabilità associata al modello CUM, il parametro  $\pi$  – che può assumere valori compresi tra 0 e 1 – moltiplica la funzione di probabilità della v.c. Multinomiale traslata ( $W_k$ ), che è associata alla componente di *feeling* del processo decisionale. Il complemento a 1 di tale parametro, ossia  $1 - \pi$ , moltiplica la funzione di probabilità della v.c. Uniforme discreta e, pertanto, indica il peso della componente di incertezza nel processo psicologico di risposta a una scala a differenziale semantico (Manisera e Zuccolotto, 2022).

Per questo motivo,  $(1 - \pi)$  rappresenta il parametro di incertezza del modello CUM: quando il valore di  $(1 - \pi)$  è prossimo a 0 – e cioè quando  $\pi$  tende a 1 – significa che l’incertezza soggettiva nella scelta della risposta è piuttosto limitata. Al contrario, valori del parametro di incertezza  $(1 - \pi)$  elevati e vicini a 1 – corrispondenti a valori di  $\pi$  prossimi a 0 – indicano che il livello di incertezza che impatta sulla decisione finale dell’alternativa di risposta risulta piuttosto elevato. Le ragioni di tale incertezza potranno essere diverse e, come nel caso del modello CUB, saranno relative ad aspetti ulteriori rispetto all’idea che il rispondente ha in merito all’aspetto che si trova a valutare su una scala a differenziale semantico. L’incertezza, infatti, può dipendere dal contesto o dallo stato d’animo in cui la persona si trova mentre risponde al questionario, dal modo in cui la domanda è stata formulata e dalle caratteristiche personali del rispondente, sia in merito al suo interesse verso l’argomento indagato o al fatto di

averlo sperimentato più o meno volte, sia relativamente alla sicurezza, all'autostima e alla motivazione a fornire una risposta.

Dal punto di vista statistico, un'incertezza elevata – segnalata dal parametro  $1 - \pi$  prossimo al valore di 1 – impatta sulla distribuzione di probabilità della v.c. CUM, perché tende ad appiattirla. All'aumentare di  $1 - \pi$ , infatti, cresce la quota di incertezza  $\frac{1-\pi}{m}$ , che rappresenta il numero di punti percentuali di cui viene aumentata – per effetto della componente di incertezza – la probabilità che ogni categoria ha di essere scelta in base al *feeling* dei rispondenti.

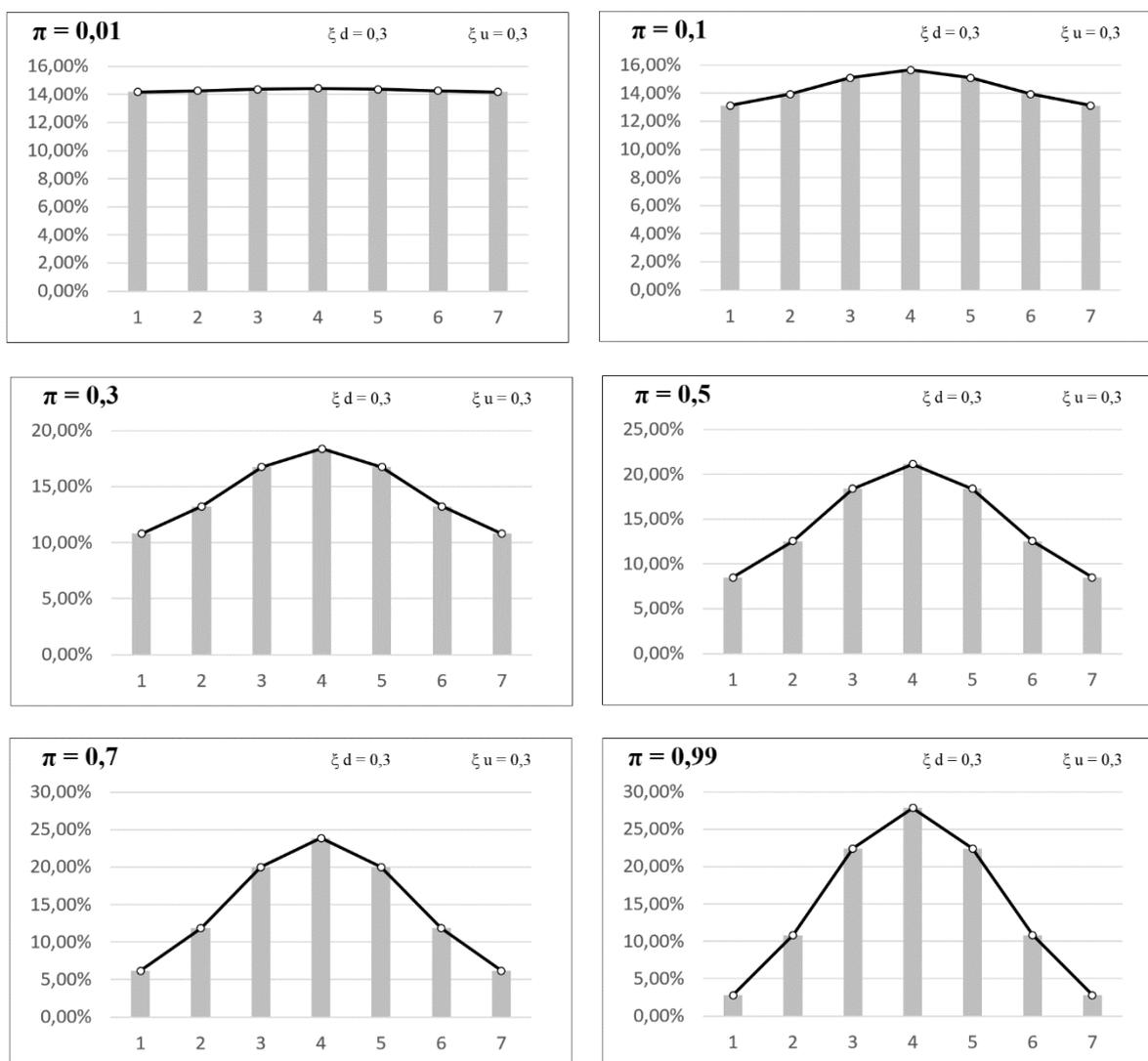


Figura 3.1. – Andamento della v.c. CUM al variare del parametro  $\pi$ .

Fonte: Nostra elaborazione, sulla base di Manisera e Zuccolotto, 2022.

Come mostra la Figura 3.1. (nei primi grafici), quando l'incertezza è elevata la funzione di massa di probabilità tende a livellarsi, in quanto la scelta dell'alternativa di risposta sarà quasi

di tipo casuale. Per effetto della componente di *feeling*, le categorie che meglio riflettono l'idea che i rispondenti hanno dell'aspetto da indagare presenteranno delle probabilità più alte di essere scelte; tuttavia, in presenza di un'elevata incertezza – che impatta in egual misura su tutte le alternative di risposta – le probabilità delle diverse categorie non risulteranno molto diverse tra loro, portando a una forma più piatta della funzione di massa di probabilità della v.c. CUM. Al contrario, quando l'incertezza risulta poco elevata – e cioè quando il valore di  $1 - \pi$  è contenuto e vicino a 0 (come negli ultimi grafici della Figura 3.1.) la distribuzione di probabilità CUM avrà un andamento determinato principalmente dalla v.c. Multinomiale linearmente trasformata associata alla componente di *feeling*, caratterizzata dai parametri  $\xi_D$  e  $\xi_U$ .

In particolare, la Figura 3.1. presenta il caso in cui  $\xi_D = \xi_U = 0,3$ ; il fatto che i due parametri siano uguali determina la simmetria della funzione di massa di probabilità, mentre il valore specifico di 0,3 ne determina la forma. Anche in presenza di valori di  $\xi_D$  e  $\xi_U$  diversi tra loro e diversi da 0,3, le considerazioni in merito all'incertezza che possono essere effettuate a partire dai grafici in Figura 3.1. restano le medesime.

### 3.4.2. I parametri di *feeling* $\xi_D$ e $\xi_U$

Oltre al parametro di incertezza, la variabile casuale CUM varia in funzione di altri due parametri che riflettono il *feeling* che i rispondenti provano verso l'aspetto che viene chiesto loro di valutare impiegando una scala a differenziale semantico. In particolare, il parametro indicato con  $\xi_D$ , che esprime la probabilità che un giudizio elementare sia di tipo “negativo”, riguarda il *feeling* verso la parte inferiore (generalmente quella sinistra) della scala a differenziale semantico (Manisera e Zuccolotto, 2022). Il parametro  $\xi_U$ , invece, corrisponde alla probabilità che un giudizio elementare sia “positivo” e, perciò, riguarda il *feeling* del rispondente verso la parte superiore (tipicamente destra) della scala (Manisera e Zuccolotto, 2022).

Siccome ciascun giudizio elementare sarà, alternativamente, di tipo “negativo”, “positivo” o “neutro”, le probabilità (indicate, rispettivamente, con  $\xi_D$ ,  $\xi_U$  e  $1 - \xi_D - \xi_U$ ) che tale giudizio sia di una di queste tipologie, sommate dovranno risultare pari a 1, in quanto è certo che il giudizio elementare sarà di uno dei tre tipi. Pertanto, i due parametri di *feeling*  $\xi_D$  e  $\xi_U$  assumeranno valori compresi tra 0 e 1, nel rispetto del vincolo  $(\xi_D + \xi_U + 1 - \xi_D - \xi_U) = 1$ .

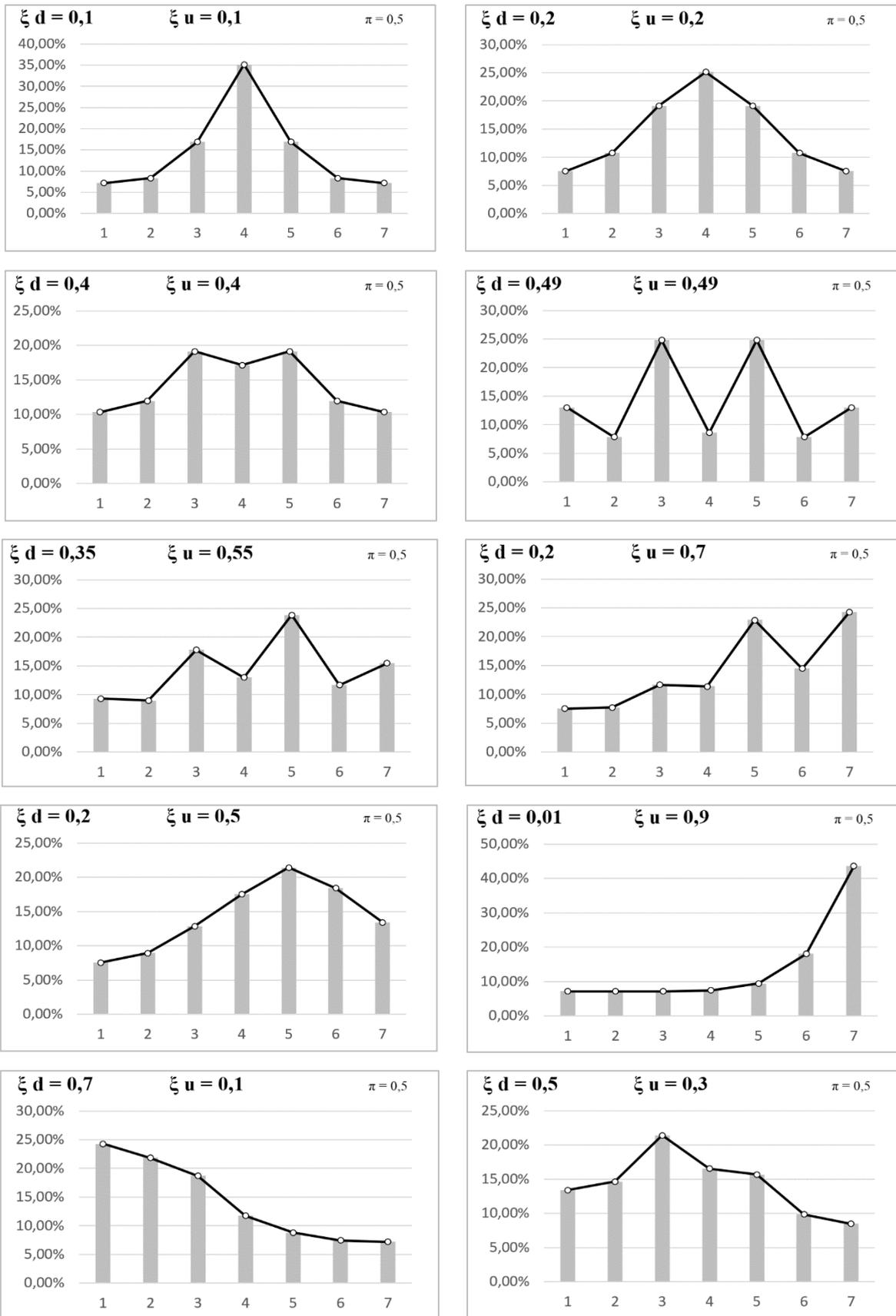


Figura 3.2. – Andamento della v.c. CUM al variare dei parametri  $\xi_D$  e  $\xi_U$ .

Fonte: Nostra elaborazione, sulla base di Manisera e Zuccolotto, 2022.

Dal punto di vista statistico, i valori assunti dai parametri  $\xi_D$  e  $\xi_U$  determinano la simmetria (o l'asimmetria) della distribuzione di probabilità associata alla v.c. CUM e indicano in corrispondenza di quali categorie saranno posizionate le probabilità più elevate. La Figura 3.2. rappresenta la funzione di massa di probabilità associata al modello CUM in corrispondenza di diversi valori dei due parametri di *feeling*, ipotizzando un livello medio di incertezza – con un parametro di incertezza  $1 - \pi$  che assume un valore pari a 0,5.

Quando  $\xi_D = \xi_U$ , cioè nei casi in cui i due parametri di *feeling* assumono il medesimo valore (come nei primi grafici in Figura 3.2.) la funzione di massa di probabilità risulta simmetrica rispetto alla categoria centrale della scala a differenziale semantico. Infatti, essendo il *feeling* del rispondente verso la parte inferiore della scala il medesimo di quello che si riscontra nei confronti della sua parte superiore, la probabilità che la risposta scelta corrisponda alla prima categoria risulta pari a quella relativa all'ultima categoria, la probabilità della seconda modalità equivarrà a quella della penultima categoria, e così via per il resto delle alternative di risposta.

Quando i due parametri assumono valori diversi, invece, la distribuzione CUM risulterà asimmetrica. In particolare, quando  $\xi_U$  risulta superiore a  $\xi_D$  si osservano probabilità più elevate in corrispondenza delle categorie posizionate nella parte destra della scala (rappresentate dai numeri più alti), come avviene nei grafici centrali della Figura 3.2. In questi casi, tra i rispondenti, nel complesso, prevarrà l'idea – e quindi il *feeling* – che l'aspetto oggetto di indagine sia meglio descritto dal termine posto in corrispondenza dell'estremo superiore della scala, rispetto al termine posizionato sul polo opposto. Quando il valore di  $\xi_U$  risulta di molto superiore a quello di  $\xi_D$ , la probabilità di ottenere una risposta pari all'ultima categoria di risposta – che rappresenta il polo destro della scala – sarà molto elevata. Di conseguenza, l'intensità dell'associazione tra l'*item* e il termine sul polo destro, effettuata dalla mente dei rispondenti, sarà elevata, in quanto  $\xi_U$  rappresenta proprio il *feeling* dei rispondenti rispetto all'estremo destro (o superiore) della scala a differenziale semantico (Manisera e Zuccolotto, 2022).

Al contrario, quando è il valore di  $\xi_D$  a essere più elevato di  $\xi_U$ , le probabilità più alte si troveranno in corrispondenza delle prime alternative di risposta (indicate dai numeri più bassi), ossia quelle che si trovano nella parte sinistra della scala a differenziale semantico; è il caso

degli ultimi due grafici della Figura 3.2. In situazioni come queste, il *feeling* dei rispondenti verso l'oggetto di indagine porterà, per lo più, ad associare all'aspetto indagato il termine posizionato sull'estremo sinistro della scala a differenziale semantico. L'intensità dell'associazione, anche in questo caso, dipenderà da quanto è elevato il valore di  $\xi_D$  e da quanto esso si discosta dal valore assunto da  $\xi_U$ ;  $\xi_D$  sarà infatti l'espressione quantitativa del *feeling* dei rispondenti rispetto al termine posto sull'estremo sinistro (o inferiore) della scala a differenziale semantico (Manisera e Zuccolotto, 2022).

La Figura 3.2. mostra anche che la variabile casuale CUM è molto flessibile – cioè è in grado di adattarsi in modo soddisfacente a diverse tipologie di distribuzioni di frequenze osservate (Manisera e Zuccolotto, 2022). Anche il modello CUB – che, oltre al parametro di incertezza  $1 - \pi$ , è caratterizzato da un solo parametro di *feeling*,  $1 - \xi$ , (D'Elia e Piccolo, 2005) – gode di una certa flessibilità; tuttavia, il modello CUM risulta più flessibile – e quindi è spesso in grado di adattarsi ancora meglio alle risposte osservate – grazie alla presenza di due parametri di *feeling*,  $\xi_D$  e  $\xi_U$ . Per esempio, una situazione in cui l'adattamento del modello CUB spesso non risulta eccellente è quella in cui due categorie, spesso distanti tra loro nella scala, in un questionario ricevono praticamente il medesimo numero di risposte. La variabile casuale CUM, come mostrano diversi grafici in Figura 3.2, a differenza della v.c. CUB non presenta necessariamente una distribuzione di probabilità unimodale ma, al contrario, in corrispondenza di specifici valori dei parametri di *feeling*, è possibile rappresentare anche i casi in cui dalle risposte emergono distribuzioni bimodali (Manisera e Zuccolotto, 2022).

In particolare, quando entrambi i valori di  $\xi_D$  e  $\xi_U$  risultano piuttosto elevati, sempre nel rispetto del vincolo  $(\xi_D + \xi_U + 1 - \xi_D - \xi_U) = 1$ , la probabilità di ottenere giudizi elementari neutri (data da  $1 - \xi_D - \xi_U$ ) risulta contenuta e quindi la probabilità associata alla categoria centrale della scala a differenziale semantico sarà anch'essa contenuta. In situazioni come queste, è possibile che la v.c. CUM presenti delle probabilità più elevate di quella associata alla categoria centrale in corrispondenza di due alternative distanti tra loro – una relativa alla parte destra della scala e una a quella sinistra. Per questo il modello CUB tende a garantire un livello di adattamento soddisfacente anche in presenza di distribuzioni di frequenze che non sono unimodali (Manisera e Zuccolotto, 2022).

La forma assunta della funzione di massa di probabilità della v.c. CUM, nel suo complesso, viene a dipendere dal valore dei due parametri di *feeling* e del parametro  $\pi$  che sono contenuti nel vettore dei parametri stimati  $\hat{\theta} = [\hat{\pi}, \widehat{\xi}_D, \widehat{\xi}_U]'$ , che rappresenta l'output dal modello CUM.

### 3.5. La stima dei parametri

Nel modello CUM, analogamente al modello CUB (D'Elia e Piccolo, 2005), la stima puntuale dei parametri  $\hat{\theta} = [\hat{\pi}, \widehat{\xi}_D, \widehat{\xi}_U]'$  può essere effettuata avvalendosi del metodo della massima verosimiglianza (Manisera e Zuccolotto, 2022). Lo scopo principale del modello, infatti, è quello di individuare i valori dei tre parametri che consentono di rappresentare al meglio le risposte raccolte su una scala a differenziale semantico. Se il livello di adattamento ai dati osservati risulta adeguato, grazie al modello CUM sarà possibile ottenere informazioni sulle componenti latenti – di *feeling* e di incertezza – che caratterizzano il processo di risposta che si può ipotizzare sia stato svolto dalla mente dei rispondenti.

#### 3.5.1. Funzione di massima verosimiglianza

Come prima cosa, si dovrà procedere al calcolo della funzione di verosimiglianza, espressa in funzione del vettore dei parametri  $\theta = [\pi, \xi_D, \xi_U]'$ , considerando per dato il campione estratto delle  $n$  risposte osservate. La funzione di verosimiglianza relativa al modello CUM, ipotizzando che le unità campionarie vengano estratte casualmente e in modo indipendente, si ottiene dalla produttoria delle funzioni di probabilità associate a ogni singola unità estratta. La formula che la rappresenta risulta quindi quella di seguito riportata, in cui  $r_i$  rappresenta l' $i$ -esima delle  $n$  risposte osservate – ossia delle  $n$  unità campionarie estratte (Manisera e Zuccolotto, 2022):

$$L_{CUM}(\theta) = \prod_{i=1}^n P_{CUM}(R = r_i | \theta) = \prod_{i=1}^n p(r_i) \quad (3.3).$$

Può essere opportuno scrivere la formula (3.3) in modo alternativo, considerando che il campione contenente le  $n$  unità estratte sia costituito da  $m$  sottocampioni che contengono un certo numero ( $n_r$ ) di unità campionarie tutte corrispondenti a  $r$ ; in questo modo si otterrà la seguente formula della funzione di verosimiglianza – equivalente alla precedente<sup>60</sup> (Manisera e Zuccolotto, 2022):

$$L_{CUM}(\theta) = \prod_{i=1}^n P_{CUM}(R = r_i | \theta) = \prod_{r=1}^m [P_{CUM}(R = r | \theta)]^{n_r} = \prod_{r=1}^m p(r)^{n_r} \quad (3.4).$$

---

<sup>60</sup> Analogamente a quanto presentato nel Capitolo 2 per il modello CUB, infatti, scrivendo la produttoria (3.3) per esteso e raggruppando tutte le risposte corrispondenti alla medesima categoria  $r$  è possibile ottenere la formula (3.4).

Anziché lavorare direttamente con la funzione di verosimiglianza, risulta spesso più agevole calcolarne il logaritmo naturale, indicato di seguito come  $\log(\cdot)$ ; la funzione di log-verosimiglianza relativa al modello CUM risulta quindi la seguente (Manisera e Zuccolotto, 2022):

$$\ell_{CUM}(\boldsymbol{\theta}) = \log \left( \prod_{i=1}^n P_{CUM}(R = r_i | \boldsymbol{\theta}) \right) = \sum_{i=1}^n \log (P_{CUM}(R = r_i | \boldsymbol{\theta})) = \sum_{i=1}^n \log(p(r_i)) \quad (3.5).$$

L'espressione della funzione di log-verosimiglianza equivalente a quella riportata nella formula (3.5), in termini degli  $m$  sottocampioni contenenti solo unità uguali tra loro, risulta la seguente (Manisera e Zuccolotto, 2022):

$$\ell_{CUM}(\boldsymbol{\theta}) = \log \left( \prod_{r=1}^m [P_{CUM}(R = r | \boldsymbol{\theta})]^{n_r} \right) = \sum_{r=1}^m [n_r \cdot \log(p(r))] \quad (3.6).$$

I valori di  $\boldsymbol{\theta} = [\pi, \xi_D, \xi_U]$  che massimizzano la funzione di log-verosimiglianza del modello CUM – analogamente a quanto avviene per il CUB (D'Elia e Piccolo, 2005) e per diversi altri modelli mistura – possono essere ottenuti impiegando l'algoritmo EM (Dempster, Laird, Rubin, 1977), che, rispetto ad altri metodi numerici, tende a essere più stabile, benché più lento (Manisera e Zuccolotto, 2022). I dati relativi alle risposte osservate, infatti, possono essere considerati come “incompleti” (Manisera e Zuccolotto, 2022), in quanto non è noto quale delle due componenti – tra quella di *feeling* e quella di incertezza – abbia generato ciascuna delle  $n$  risposte. Per includere anche questa informazione nella funzione di verosimiglianza, si possono considerare le variabili  $z$  – latenti e quindi non direttamente osservabili; ognuna di queste variabili assume valore 1 ( $z_{d,i} = 1$ ) quando è la distribuzione  $d$ , a cui la variabile  $z$  è associata, ad aver generato una specifica risposta  $i$ , mentre negli altri casi la variabile risulterà pari a 0 (Manisera e Zuccolotto, 2022). Nel modello CUM, le possibili distribuzioni di probabilità che possono generare una certa risposta sono soltanto due: la Multinomiale (linearmente trasformata) associata alla componente di *feeling* e l'Uniforme discreta per la componente di incertezza. Pertanto, è possibile semplificare la notazione relativa alle variabili  $z$ , indicando con  $z_i$  la variabile che esprime se la risposta  $i$  è derivata dalla componente di *feeling*; di conseguenza,  $(1 - z_i)$  indicherà se la risposta sia stata determinata dalla componente di incertezza (Manisera e Zuccolotto, 2022). La funzione di log-verosimiglianza completa del modello CUM risulta quindi la seguente (Manisera e Zuccolotto, 2022):

$$\ell_C(\boldsymbol{\theta}) = \log (L_C(\boldsymbol{\theta})) = \sum_{i=1}^n \{z_i \cdot [\log(\pi \cdot P_{Mnom}(r_i))] + (1 - z_i) \cdot [\log((1 - \pi) \cdot P_U(r_i))]\} \quad (3.7),$$

dove  $P_{Multinom}$  rappresenta la funzione di massa di probabilità ( $W_k(r|\xi_D, \xi_U)$ ) della v.c. Multinomiale linearmente trasformata ( $W_k$ ), relativa all'ultimo step ( $k = T$ ) del percorso di *feeling*;  $P_U$  sarà invece la funzione massa di probabilità della v.c. Uniforme discreta (che corrisponde a  $\frac{1}{m}$ ).

La formula della funzione di log-verosimiglianza completa diventa quindi la seguente (Manisera e Zuccolotto, 2022):

$$\ell_c(\theta) = \log(L_c(\theta)) = \sum_{i=1}^n \{z_i \cdot [\log(\pi \cdot W_k(r_i|\xi_D, \xi_U))] + (1 - z_i) \cdot \left[ \log\left( (1 - \pi) \cdot \frac{1}{m} \right) \right] \quad (3.8).$$

### 3.5.2. Funzionamento dell'algoritmo EM

L'algoritmo EM procederà, iterativamente, a individuare i valori provvisori dei tre parametri del modello CUM finché non verrà raggiunta la convergenza – cioè quando, con i nuovi parametri provvisori, la funzione di log-verosimiglianza migliora meno di un valore  $\delta$  piccolo e positivo – o finché non si verifica che, per ciascuno dei parametri, l'ultimo valore stimato si discosta dal valore precedente in misura inferiore di un certo valore  $\varepsilon$  piccolo e positivo (Manisera e Zuccolotto, 2022).

Per iniziare a operare, l'algoritmo EM richiederà che vengano indicati i valori iniziali dei tre parametri; come nel caso del CUB (D'Elia e Piccolo, 2005), anche per il modello CUM si può considerare di attribuire il valore iniziale di 0,5 al parametro  $\pi$  (Manisera e Zuccolotto, 2022), in modo da partire dalla situazione in cui le due componenti latenti di *feeling* e di incertezza hanno lo stesso peso nel determinare le risposte osservate. Relativamente ai due parametri di *feeling*, invece, può essere opportuno attribuire a entrambi il valore iniziale di 0,3; in questo modo, generalmente, le stime ottenute risultano affidabili (Manisera e Zuccolotto, 2022). Questa scelta, infatti, consente all'algoritmo EM di iniziare a operare con dei valori che occupano una posizione centrale nello spazio parametrico relativo a  $\xi_D$  e  $\xi_U$ , che assumeranno valori non negativi, non superiori a 1, e che soddisfino il vincolo previsto per le probabilità dei diversi stati che caratterizzano una v.c. Multinomiale, secondo cui  $(\xi_D + \xi_U + 1 - \xi_D - \xi_U) = 1$ . Partendo distanti dai confini dello spazio parametrico, è più facile evitare che l'algoritmo EM converga verso un massimo locale – spesso posizionato ai limiti dello spazio dei parametri (Manisera e Zuccolotto, 2017) – anziché individuare il massimo assoluto della funzione di verosimiglianza (Manisera e Zuccolotto, 2022).

Una volta che i valori iniziali dei tre parametri del modello CUM sono stati definiti, l'algoritmo EM può iniziare con la prima iterazione che, analogamente alle altre iterazioni svolte, sarà caratterizzata da una sequenza di operazioni che vengono via via eseguite per massimizzare la funzione di log-verosimiglianza (Manisera e Zuccolotto, 2022). Per fare questo, viene utilizzata la funzione di log-verosimiglianza completa associata al modello CUM, nella quale il valore assunto dalla variabile latente  $z$ , per ciascuna delle risposte osservate, viene sostituito con il valore medio di questa variabile calcolato su tutte le  $n$  risposte osservate che vengono fornite in input all'algoritmo. Il valore medio della variabile  $z$ , che indica se la risposta deriva dalla v.c. Multinomiale, corrisponderà, analogamente al modello CUB (D'Elia e Piccolo, 2005), alla probabilità che la risposta derivi dalla componente di *feeling* (Manisera e Zuccolotto, 2022). Questa probabilità sarà la medesima per tutte quelle risposte  $r_i$  che si sono indirizzate verso la stessa categoria ( $r$ ) della scala a differenziale semantico; pertanto, per ciascuna delle  $m$  alternative di risposta potrà essere calcolata la probabilità che esse discendano dal *feeling* dei rispondenti e dunque alla v.c. Multinomiale trasformata. Questa probabilità, indicata con  $\tau_{r_i}^{(j)}$ , dove  $j$  indica il numero di iterazione che l'algoritmo sta compiendo, sarà la medesima per ogni risposta corrispondente a una categoria  $r$  e risulta la seguente (Manisera e Zuccolotto, 2022):

$$\tau_{r_i}^{(j)} = \tau_{r|\theta^{(j)}} = \frac{\pi^{(j)} \cdot P_{Mnom}(r_i | \xi_D^{(j)}, \xi_U^{(j)})}{P_{CUM}} = \frac{\pi^{(j)} \cdot W_k(r_i | \xi_D^{(j)}, \xi_U^{(j)})}{\pi^{(j)} \cdot W_k(r_i | \xi_D^{(j)}, \xi_U^{(j)}) + (1 - \pi^{(j)}) \cdot \frac{1}{m}}.$$

Sostituendo  $\tau_{r_i}^{(j)}$  a  $z_i$  nella funzione di log-verosimiglianza completa si ottiene l'espressione del valore atteso (*expectation*) di quest'ultima, che risulta (Manisera e Zuccolotto, 2022):

$$\mathbb{E}(\ell_c(\theta^{(j)})) = \sum_{i=1}^m \left\{ \tau_{r_i|\theta^{(j)}} \cdot \left[ \log(\pi \cdot W_k(r_i | \xi_D^{(j)}, \xi_U^{(j)})) \right] + (1 - \tau_{r_i|\theta^{(j)}}) \cdot \left[ \log\left( (1 - \pi^{(j)}) \cdot \frac{1}{m} \right) \right] \right\}.$$

Il valore medio della funzione di log-verosimiglianza completa può essere espresso in termini di ciascuna delle  $m$  alternative di risposta e può essere indicato con  $G^{(j)}(\theta)$ , la cui espressione è quella di seguito riportata (Manisera e Zuccolotto, 2022):

$$G^{(j)}(\theta) = \sum_{r=1}^n \left\{ n_r \cdot \tau_{r|\theta^{(j)}} \left[ \log(\pi \cdot W_k(r | \xi_D^{(j)}, \xi_U^{(j)})) \right] + n_r \cdot (1 - \tau_{r|\theta^{(j)}}) \left[ \log\left( (1 - \pi^{(j)}) \cdot \frac{1}{m} \right) \right] \right\},$$

dove  $n_r$  rappresenta la frequenza assoluta della categoria  $r$ , ossia esprime il numero di volte in cui essa si presenta all'interno delle risposte osservate.

La funzione  $G^{(j)}(\theta)$  ottenuta nella fase di *Expectation* dell'algoritmo EM va massimizzata (nella fase di *Maximization*) per individuare le stime provvisorie dei parametri da impiegare

nell'iterazione successiva dell'algoritmo. La massimizzazione della funzione dovrà essere effettuata rispetto al parametro  $\pi$  e ai parametri di *feeling*  $\xi_D$  e  $\xi_U$ . A tale scopo, può essere utile riscrivere tale funzione come somma di due termini:  $G^{(j)}(\theta) = G_1^{(j)}(\pi) + G_2^{(j)}(\xi_D, \xi_U)$ , in cui il primo termine dipende esclusivamente dal parametro  $\pi$ , mentre il secondo viene a dipendere dai parametri  $\xi_D$  e  $\xi_U$  (Manisera e Zuccolotto, 2022).

I due addendi che costituiscono la funzione  $G^{(j)}(\theta)$  possono essere massimizzati separatamente. Per massimizzare  $G_1^{(j)}(\pi)$  sarà necessario calcolare la sua derivata prima rispetto a  $\pi$  e porla uguale a zero; si otterrà quindi  $\frac{\partial G_1^{(j)}(\pi)}{\partial \pi} = \sum_{r=1}^m \frac{n_r \cdot \tau_{r|\theta^{(j)}} - \pi}{\pi(1-\pi)}$  che, posta uguale a 0 risulterà pari  $\pi = \frac{1}{n} \cdot \sum_{r=1}^m [n_r \cdot \tau_{r|\theta^{(j)}}] = \pi^{(j+1)}$  (Manisera e Zuccolotto, 2022).

Il valore di  $\pi$  ottenuto in questo modo corrisponderà alla stima di tale parametro da impiegare nell'iterazione successiva dell'algoritmo EM e per questo può essere indicato con  $\pi^{(j+1)}$ . In particolare, tale valore corrisponderà alla media aritmetica delle probabilità che ciascuna delle  $m$  alternative di risposta ha di essere generata dalla componente di *feeling*, sulla base delle stime (provvisorie) dei parametri  $[\pi^{(j)}, \xi_D^{(j)}, \xi_U^{(j)}] = \theta^{(j)}$  effettuate dall'algoritmo EM nell'iterazione precedente.

La massimizzazione della funzione  $G_2^{(j)}(\xi_D, \xi_U)$  si otterrà calcolando le due derivate parziali, rispetto a  $\xi_D$  e a  $\xi_U$ ; il punto di massimo si troverà in corrispondenza dei valori dei due parametri di *feeling* che consentono di rendere uguali a 0 entrambe le derivate parziali, perciò, sarà necessario risolvere il seguente sistema di equazioni non lineari (Manisera e Zuccolotto, 2022):

$$\begin{cases} \frac{\partial G_2^{(j)}(\xi_D, \xi_U)}{\partial \xi_D} = \sum_{r=1}^m \frac{n_r \cdot \tau_{r|\theta^{(j)}}}{W_k(r|\xi_D, \xi_U)} \cdot \frac{\partial W_k(r|\xi_D, \xi_U)}{\partial \xi_D} = 0 \\ \frac{\partial G_2^{(j)}(\xi_D, \xi_U)}{\partial \xi_U} = \sum_{r=1}^m \frac{n_r \cdot \tau_{r|\theta^{(j)}}}{W_k(r|\xi_D, \xi_U)} \cdot \frac{\partial W_k(r|\xi_D, \xi_U)}{\partial \xi_U} = 0. \end{cases}$$

Dalla risoluzione del sistema deriveranno i valori da assegnare ai due parametri di *feeling* nell'iterazione successiva dell'algoritmo EM, ossia  $\xi_D^{(j+1)}$  e  $\xi_U^{(j+1)}$ .

Quando, dopo un certo numero di iterazioni, le nuove stime (provvisorie) dei parametri non consentiranno un miglioramento apprezzabile della funzione di log-verosimiglianza o quando i nuovi valori di tutti i parametri risulteranno poco differenti da quelli stimati al passo precedente, l'algoritmo EM non inizierà una nuova iterazione. Gli ultimi valori stimati  $[\pi^{(j+1)}, \xi_D^{(j+1)}, \xi_U^{(j+1)}] = \theta^{(j+1)}$ , verranno considerati come le stime definitive dei parametri del modello CUM, perciò, potranno essere indicati come  $\hat{\theta} = [\hat{\pi}, \hat{\xi}_D, \hat{\xi}_U]'$ .

### 3.6. Bontà della rappresentazione

Una volta ottenute le stime di massima verosimiglianza dei tre parametri della v.c. CUM, è possibile valutare il livello di adattamento del modello ai dati osservati, per capire se la variabile casuale a esso associata – in corrispondenza di  $\hat{\theta} = [\hat{\pi}, \hat{\xi}_D, \hat{\xi}_U]'$  – rappresenti adeguatamente le risposte raccolte utilizzando una scala a differenziale semantico. Solo in corrispondenza di un livello di adattamento soddisfacente, infatti, il modello CUM potrà essere utilizzato per ottenere informazioni sulle componenti latenti di *feeling* e di incertezza che hanno caratterizzato il processo psicologico effettuato dai rispondenti.

Il livello di adattamento del modello ai dati osservati, come avviene nel caso dei diversi modelli appartenenti alla classe CUB (Piccolo e Simone, 2019), può essere ottenuto dal calcolo dell'indice di dissimilarità (*Diss*), che misura la percentuale di risposte che dovrebbero essere cambiate per ottenere un perfetto adattamento (Manisera e Zuccolotto, 2022). Questo indice si ottiene calcolando, per ciascuna delle  $m$  categorie di risposta, gli scarti tra la frequenza relativa osservata ( $f_r = \frac{n_r}{\sum_{r=1}^m n_r} = \frac{n_r}{n}$ ) e la probabilità  $p_r$  che – secondo il modello CUM e in corrispondenza dei parametri stimati  $\hat{\theta} = [\hat{\pi}, \hat{\xi}_D, \hat{\xi}_U]'$  – la categoria  $r$  ha di essere scelta. Queste differenze ( $f_r - p_r$ ) verranno sommate – prendendo il loro valore assoluto per evitare compensazioni di segno – e la somma ottenuta verrà divisa per 2. Pertanto, analogamente al modello CUB, anche per il CUM l'indice di dissimilarità risulterà il seguente (Manisera e Zuccolotto, 2022):

$$Diss = \frac{1}{2} \cdot \sum_{r=1}^m |f_r - p_r| = \frac{1}{2} \cdot \sum_{r=1}^m \left| \frac{n_r}{n} - P_{CUM(\hat{\pi}, \hat{\xi}_D, \hat{\xi}_U)}(R = r) \right| \quad (3.9).$$

L'indice di dissimilarità può assumere valori compresi tra 0 e 1; più il suo valore è prossimo allo 0 e più elevato sarà il livello di adattamento del modello CUM ai dati osservati. Analogamente al modello CUB (Iannario e Piccolo, 2010a), si potrebbe ritenere che valori dell'indice  $Diss \leq 0,10$  indichino un livello di adattamento accettabile; in presenza di tali valori, infatti, meno del 10% delle risposte dovrebbero essere modificate per garantire una corrispondenza perfetta tra le frequenze relative osservate e le probabilità indicate dal modello CUM in corrispondenza dei parametri stimati  $\hat{\theta} = [\hat{\pi}, \hat{\xi}_D, \hat{\xi}_U]'$ . Rispetto al modello CUB, nel CUM, in genere, si riscontra un livello di adattamento migliore, in quanto la variabile casuale a esso associata dipende – oltre che da  $\hat{\pi}$  – da due parametri di *feeling*, uno relativo alla parte inferiore della scala e uno a quella superiore (Manisera e Zuccolotto, 2022). La distribuzione

di probabilità del modello CUM risulta quindi più flessibile rispetto a quella del CUB; per questo motivo, il modello CUM è in grado di rappresentare in modo soddisfacente una più ampia varietà di distribuzioni di frequenze osservate (Manisera e Zuccolotto, 2022).

### 3.7. Utilizzo dei modelli CUM

Nei casi in cui, dopo aver stimato i parametri  $\hat{\pi}$ ,  $\hat{\xi}_D$  e  $\hat{\xi}_U$  tramite l'algoritmo EM, dall'indice di dissimilarità risulta che il modello CUM si adatta bene alle risposte raccolte su una scala a differenziale semantico, è possibile utilizzare le stime dei parametri del modello per ottenere informazioni sulle componenti di incertezza e di *feeling* che hanno determinato la scelta dei rispondenti. Grazie ai parametri stimati, sarà anzitutto possibile isolare il contributo dell'incertezza soggettiva da quello della componente di *feeling* nel determinare la decisione finale. Relativamente alla componente di *feeling*, si otterranno due misure ( $\hat{\xi}_D$  e  $\hat{\xi}_U$ ), una per la parte destra della scala a differenziale semantico e una per quella sinistra (Manisera e Zuccolotto, 2022); in questo modo sarà possibile avere informazioni su come i rispondenti percepiscono l'*item* da valutare rispetto ai due termini posti all'estremo destro e sinistro della scala a differenziale semantico.

#### 3.7.1. Misure di incertezza e di *feeling*

Il valore stimato di  $\hat{\pi}$  esprime il peso della v.c. Multinomiale all'interno della funzione di massa di probabilità del modello CUM, perciò, il valore  $1 - \hat{\pi}$  corrisponde al peso della v.c. Uniforme e, di conseguenza, è una misura del grado di incertezza soggettiva che ha caratterizzato il processo psicologico dei rispondenti. In caso di massima incertezza – ossia quando  $1 - \hat{\pi}$  risulta pari a 1 (e cioè quando  $\hat{\pi} = 0$ ) – tutte le categorie della scala avrebbero la stessa probabilità di essere scelte (pari alla probabilità espressa dalla v.c. Uniforme discreta, ossia  $\frac{1}{m}$ ).

Generalmente, però, la scelta dell'alternativa di risposta non avviene in modo completamente casuale, ma deriva, in una certa percentuale (indicata da  $1 - \hat{\pi}$ ), dalla componente di incertezza e, per la restante parte ( $\hat{\pi}$ ), da una valutazione ponderata del proprio *feeling* verso l'*item* da valutare.

Il valore  $\frac{1-\hat{\pi}}{m}$  rappresenta quindi la quota di incertezza, cioè indica quanti punti percentuali della probabilità che ogni categoria ha di essere scelta – secondo il modello CUM, in corrispondenza dei parametri stimati – derivano dalla componente di incertezza soggettiva. Visto che il valore

della quota di incertezza è uguale per ciascuna categoria, è come se questa dividesse la funzione di massa di probabilità della v.c. CUM in due parti: una – costante per tutte le alternative di risposta – derivante dall'incertezza e un'altra – variabile – che dipende dal *feeling* dei rispondenti.

Fornendo in input al modello CUM le  $n$  risposte osservate, si otterranno – oltre a  $\hat{\pi}$  – i valori stimati di  $\widehat{\xi}_D$  e  $\widehat{\xi}_U$ , che forniscono informazioni sulla componente di *feeling* del processo psicologico di risposta a una scala a differenziale semantico.

Quando si trova a valutare un certo aspetto mediante questa tipologia di scale ordinali, il rispondente deve decidere quale dei due termini posti agli estremi della scala descriva meglio l'*item* indagato, con la possibilità di scegliere la categoria centrale quando l'oggetto di indagine può considerarsi neutrale rispetto ai due termini posizionati sui due poli della scala. Per questo motivo, si può considerare che il processo decisionale prenda avvio in corrispondenza dell'alternativa centrale, dalla quale si può scegliere verso quale estremo della scala orientare la propria risposta. Più la scelta finale del rispondente risulterà vicina a uno dei due estremi e maggiore sarà l'intensità del *feeling* verso quella parte della scala, ossia della convinzione che il termine posto su quel polo della scala rappresenti bene l'*item* che viene chiesto di valutare.

Nel caso delle scale a differenziale semantico, quindi, il *feeling* – cioè l'idea che i rispondenti hanno dell'aspetto che viene chiesto loro di valutare – si scinderà in due elementi distinti: la valutazione dell'oggetto di indagine rispetto al termine posto sul polo sinistro della scala e la valutazione con riguardo al termine posto sull'estremo destro. Di conseguenza, saranno necessarie due misure che esprimano, sinteticamente, il *feeling* degli  $n$  rispondenti rispetto all'aspetto indagato: si tratta dei valori stimati di  $\widehat{\xi}_D$  e  $\widehat{\xi}_U$  che, rispettivamente, esprimono il *feeling* verso la parte sinistra e verso la parte destra della scala a differenziale semantico (Manisera e Zuccolotto, 2022).

In particolare, il valore di  $\widehat{\xi}_D$  esprimerà l'intensità – media per gli  $n$  rispondenti – della convinzione che l'*item* da valutare possa essere descritto in modo adeguato dal termine posto all'estremo inferiore della scala a differenziale semantico. Al crescere del valore stimato del parametro  $\widehat{\xi}_D$ , le probabilità associate alle prime alternative di risposta della scala – quelle più prossime all'estremo sinistro (o inferiore) – saranno quelle che assumeranno i valori più elevati.

Il valore  $\widehat{\xi}_U$ , invece, indicherà l'intensità – tra gli  $n$  rispondenti – della convinzione che il termine posizionato in corrispondenza del polo superiore della scala possa descrivere adeguatamente l'aspetto che viene chiesto di valutare. Più il valore stimato del parametro  $\widehat{\xi}_U$  aumenta, maggiore sarà la probabilità di ottenere una risposta corrispondente alle ultime categorie della scala a differenziale semantico, cioè di quelle posizionate in prossimità del suo estremo destro (o superiore).

### 3.7.2. Rappresentazione grafica delle misure di *feeling* e di incertezza

Dal punto di vista della v.c. Multinoulli associata a ognuno dei giudizi elementari (che vengono poi accumulati e trasformati), i valori  $\widehat{\xi}_D$  e  $\widehat{\xi}_U$  rappresentano le probabilità che il singolo giudizio elementare sia, rispettivamente, “negativo” – che suggerisce cioè di spostarsi verso la categoria inferiore della scala – o “positivo” – che fa spostare la scelta provvisoria verso l'alternativa superiore. Vi è poi un'ultima tipologia di possibili giudizi elementari, ossia quelli “neutri”, che non fanno spostare né verso destra né verso sinistra rispetto alla categoria che già caratterizza la scelta provvisoria del rispondente. La probabilità associata ai giudizi “neutri” è pari a  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ ; di conseguenza, sarà verificato il vincolo richiesto per le probabilità degli stati di una v.c. Multinomiale, ossia che esse, sommate, risultino pari a 1, in quanto è certo che un qualsiasi giudizio elementare sarà, alternativamente, “positivo” o “negativo” o “neutro”.

Pertanto, le misure del *feeling* verso la parte sinistra e destra della scala a differenziale semantico, rappresentate dai valori stimati di  $\widehat{\xi}_D$  e  $\widehat{\xi}_U$ , possono anche essere interpretate come la probabilità che un singolo giudizio elementare – in ognuno degli step del percorso di *feeling* – sia, rispettivamente, “negativo” o “positivo”. Il complemento a 1 di questi due valori (ossia  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ ), oltre a rappresentare la probabilità di ottenere un giudizio elementare “neutro”, esprimerà anche il *feeling* dei rispondenti verso la categoria centrale della scala.

Infatti, in corrispondenza di un *feeling* ridotto sia verso la parte sinistra della scala (indicato da bassi valori di  $\widehat{\xi}_D$ ), sia verso la parte destra (indicato da valori contenuti di  $\widehat{\xi}_U$ ), la convinzione prevalente tra i rispondenti sarà quella che l'*item* da valutare è considerato neutrale rispetto ai due termini posti ai due estremi della scala a differenziale semantico. In particolare, questo avverrà quando il valore di  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$  risulta almeno pari a 0,5 e, di conseguenza i valori stimati di  $\widehat{\xi}_D$  e  $\widehat{\xi}_U$  risultano piuttosto contenuti (e al massimo, sommati, non superano 0,5). Invece, quando  $\widehat{\xi}_D \geq 0,5$ , risulterà prevalente la convinzione che il termine posto sull'estremo

inferiore della scala descriva adeguatamente l'*item* indagato e, dunque, i giudizi elementari più probabili saranno quelli di tipo “negativo”. Infine, quando  $\widehat{\xi}_U \geq 0,5$ , sarà prevalente l'idea che l'oggetto della valutazione sia meglio descritto dal termine sul polo superiore della scala e, per questo, la tipologia di giudizi elementari più probabili sarà rappresentata da quelli “positivi”.

Sulla base delle considerazioni appena presentate, è possibile effettuare una rappresentazione grafica delle misure di *feeling* che caratterizzano le risposte a una certa scala a differenziale semantico, utilizzando il cosiddetto “*ternary plot*” (Manisera e Zuccolotto, 2022), ossia un grafico che assume la forma di un triangolo, in cui ciascun lato – corrispondente a un asse del grafico – è riferito a una delle tre possibili tipologie di giudizi elementari che possono essere formulati dai rispondenti. La scala a differenziale semantico corrisponderà a un punto nel grafico, in corrispondenza dei tre valori stimati  $\widehat{\xi}_D$ ,  $\widehat{\xi}_U$  e  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ , posizionati sul rispettivo asse del *ternary plot*.

A sua volta, il triangolo rappresentato dai tre assi del grafico può essere suddiviso in quattro aree, anch'esse di forma triangolare. Una riguarderà le situazioni in cui la maggioranza delle risposte risulta sbilanciata verso l'estremo inferiore della scala, un'altra riguarderà i casi in cui prevalgono le scelte orientate verso l'estremo superiore, e un'altra area ancora si riferirà alle situazioni in cui è prevalente un *feeling* neutrale (Manisera e Zuccolotto, 2022). Infine, l'ultima area triangolare – che assumerà una posizione centrale nel *ternary plot* – riguarderà i casi intermedi, nei quali nessuna delle probabilità di ottenere un giudizio elementare “negativo”, “positivo” o “nullo” risulta prevalente – e cioè superiore al 50%.

Oltre che per rappresentare graficamente le informazioni sulla componente di *feeling*, il *ternary plot* consente anche di dare un'indicazione sulla misura della componente di incertezza del processo decisionale (Manisera e Zuccolotto, 2022). Questo avviene variando la dimensione del punto che, nel grafico, rappresenta una certa scala a differenziale semantico: un punto più piccolo indicherà che l'incertezza è contenuta – ossia il valore  $1 - \hat{\pi}$  è prossimo allo 0 – mentre un punto più grande segnalerà un elevato livello di incertezza nella scelta della categoria – in presenza di valori di  $1 - \hat{\pi}$  vicini all'unità (Manisera e Zuccolotto, 2022).

La Figura 3.3. mostra le diverse aree in cui può essere suddiviso il *ternary plot* e riporta un esempio di come avviene la rappresentazione delle misure di *feeling* e di incertezza relative a una certa scala a differenziale semantico.

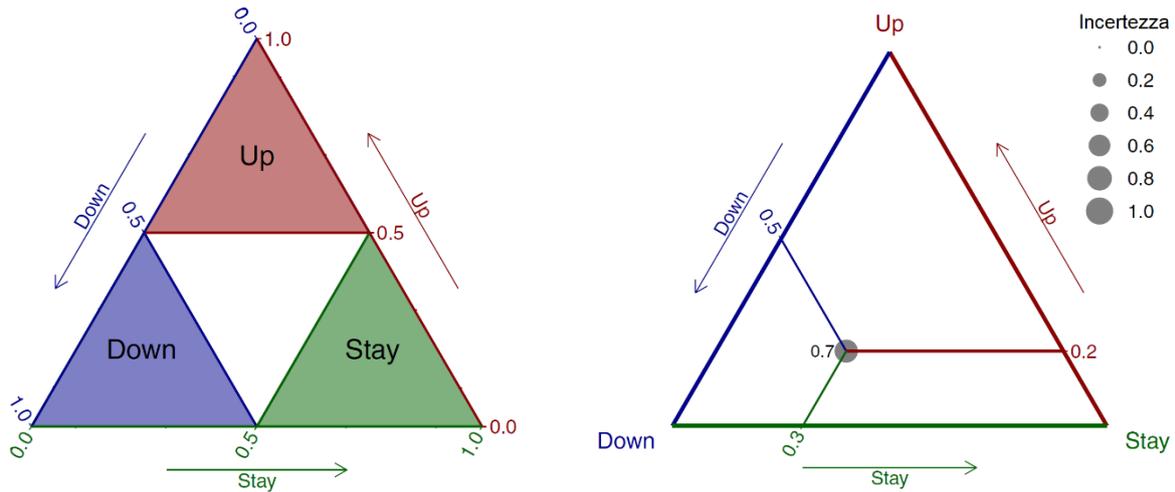


Figura 3.3. – Struttura del ternary plot e rappresentazione del feeling e dell'incertezza.  
 Fonte: Manisera e Zuccolotto, 2022.

La Figura 3.4, invece, riporta un esempio che mostra come sia possibile rappresentare in un unico grafico le misure di feeling e di incertezza relative a più scale diverse.

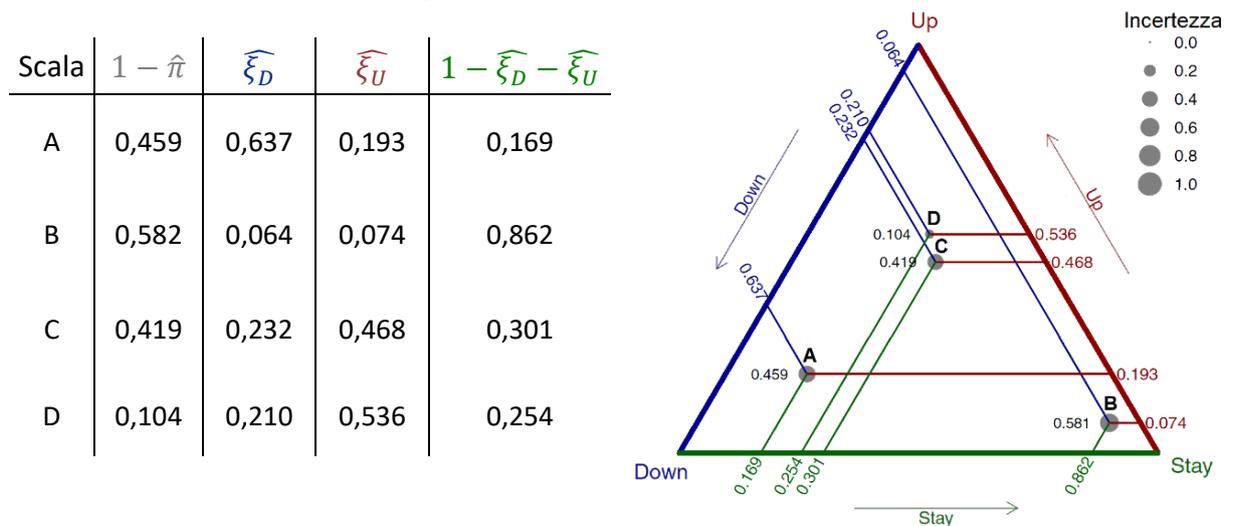


Figura 3.4. – Confronto delle misure di feeling e di incertezza relative a più scale diverse.  
 Fonte: Manisera e Zuccolotto, 2022.

Nei questionari, infatti, capita spesso di utilizzare più scale – a differenziale semantico o comunque scale ordinali con un numero dispari di categorie, di cui quella centrale denota neutralità – per indagare un aspetto complesso attraverso una batteria di *item*. Impiegando la rappresentazione in Figura 3.4, è possibile confrontare in modo immediato le diverse scale, sulla base del parametro di incertezza a esse associato – misurato dalla dimensione del punto che le rappresenta – e sulla base delle misure ai feeling relative a ciascuna scala – indicate sui tre assi del grafico.

Visto che le misure di *feeling* verso la parte inferiore della scala ( $\widehat{\xi}_D$ ) e verso quella superiore ( $\widehat{\xi}_U$ ) – così come il loro complemento a 1 ( $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ ) – assumono valori compresi tra 0 e 1 per ciascuna delle scale, è possibile ordinare queste ultime in modo crescente rispetto a ciascuna delle tre misure di *feeling* stimate, per ognuna delle scale, tramite l’algoritmo EM. L’asse sinistro del *ternary plot* riporterà i valori – ordinati in senso crescente – relativi alla misura del *feeling* verso la parte sinistra (o inferiore) della scala; l’asse destro riporterà invece le misure del *feeling* verso la parte destra (o superiore) della scala. Infine, l’asse orizzontale – ossia la base del triangolo – riporterà, in ordine crescente, i valori stimati di  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ , che esprime il *feeling* verso la categoria centrale della scala a differenziale semantico. Combinando i tre valori stimati  $\widehat{\xi}_D$ ,  $\widehat{\xi}_U$  e  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ , sarà possibile associare a ogni scala a differenziale semantico un punto nel *ternary plot*, le cui coordinate esprimeranno le misure di *feeling* e la cui dimensione darà informazioni sulla misura di incertezza  $1 - \hat{\pi}$ .

In questo modo, anzitutto, è possibile individuare se vi sono alcune scale per le quali l’incertezza soggettiva risulta elevata; in questi casi, sarà opportuno cercare di comprendere le cause di tanta indecisione nel rispondere alla domanda che chiede di valutare un erto *item* rispetto a una coppia di termini di significato opposto.

La rappresentazione congiunta di più scale consentirà poi di confrontarle, in modo immediato, rispetto al *feeling* manifestato dai rispondenti. Sarà possibile individuare gli *item* per i quali il *feeling* prevalente tra i rispondenti fa associare all’oggetto di analisi il termine posto sull’estremo sinistro della scala. Questo si verificherà quando il punto è posizionato nell’area in basso a sinistra del grafico (come la scala A in Figura 3.4.), per il quale il valore di  $\widehat{\xi}_D$  – corrispondente alla probabilità che un giudizio elementare sia di tipo “negativo” – risulta elevato.

Gli *item* meglio descritti dal termine posto sul polo destro della scala saranno invece rappresentati dai punti posti nell’area superiore del *ternary plot* (come la scala D in Figura 3.4.), in cui il valore più elevato risulta quello di  $\widehat{\xi}_U$  – espressione della probabilità di ottenere un giudizio elementare “positivo”.

I punti presenti nell’area in basso a destra del grafico, invece, riguarderanno quegli *item* per i quali i giudizi “neutri” sono la tipologia di giudizi elementari che è più probabile ottenere, in

quanto il valore più elevato risulta quello di  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$  (come nel caso della scala B in Figura 3.4.).

Infine, i punti presenti nell'area centrale del *ternary plot* rappresenteranno delle situazioni intermedie, in cui almeno due delle misure di *feeling*  $\widehat{\xi}_D$ ,  $\widehat{\xi}_U$  e  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$  risultano piuttosto vicine tra loro (come nel caso della scala C in Figura 3.4.), in quanto nessuna di esse risulta superiore a 0,5 e, come per ogni punto del grafico, vale che  $\widehat{\xi}_D + \widehat{\xi}_U + 1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U = 1$ . Diverse saranno però le possibili combinazioni delle tre misure di *feeling* rientranti in quest'area; dal grafico sarà possibile capire quanto queste situazioni siano o meno distanti da quelle – più nette – rappresentate nelle altre tre aree del grafico (“*down*”, “*up*” o “*stay*”).

## CAPITOLO 4

### **APPLICAZIONE DEL MODELLO CUM: IL CASO DELL'INDAGINE SENSORIALE SVOLTA PRESSO LA PINACOTECA TOSIO-MARTINENGO**

L'obiettivo del presente Capitolo è quello di illustrare come il modello CUM possa essere applicato a un caso concreto, utilizzandolo cioè per effettuare l'analisi dei dati raccolti, per indagare un certo fenomeno di interesse, attraverso un questionario che richiede di rispondere a una o più scale a differenziale semantico.

In particolare, i dati che verranno analizzati rappresentano le risposte a un questionario che è stato sottoposto ai visitatori della Pinacoteca Tosio-Martinengo di Brescia, nell'ambito di un Progetto di ricerca – di cui si parlerà più specificamente nel seguito – condotto dall'Università degli Studi di Brescia, con la finalità di applicare la Statistica e la Data Science ai luoghi della cultura. Nello specifico, l'obiettivo del questionario era quello di effettuare un'indagine sensoriale, cioè di raccogliere informazioni sulle sensazioni e sulle emozioni suscitate nei rispondenti dalla visita della Pinacoteca.

Dopo una breve presentazione del Progetto e del questionario che è stato ideato, ci si soffermerà sulla parte di quest'ultimo che, chiedendo di rispondere a una batteria di scale a differenziale semantico, porta i visitatori a manifestare le percezioni sensoriali provate visitando la Pinacoteca. Una volta riportata la distribuzione di frequenze delle risposte osservate, verrà discusso il livello di adattamento del modello CUM ai dati e verranno presentate le stime ottenute per i parametri del modello. Sulla base di questi valori stimati sarà possibile ottenere informazioni sulle componenti di incertezza e di *feeling* che si può ritenere abbiano caratterizzato il processo di risposta alle diverse scale a differenziale semantico.

Oltre ad applicare il modello CUM alla totalità delle risposte raccolte nella Pinacoteca, questo modello potrà essere impiegato per analizzare le sole risposte fornite dai visitatori intervistati in una sala specifica, grazie al fatto che per ogni questionario è noto in quale sala esso è stato compilato. Dato che le sale oggetto di analisi si caratterizzano per il diverso colore delle loro pareti, può essere utile analizzare singolarmente le risposte raccolte in ognuna di esse per verificare se – e in che modo – le percezioni sensoriali variano da una sala all'altra, oltre che per effetto delle opere esposte, anche sulla base del colore delle pareti della stanza.

#### 4.1. Progetti “Musei Brescia” e “Data Science for Brescia”

Nel marzo 2019 presso l’Università degli Studi di Brescia ha preso avvio il Progetto “Musei Brescia”, condotto dal DMS LabStat, il Laboratorio di Statistica “Dati Metodi Sistemi” del Dipartimento di Economia e Management, in collaborazione con l’Ufficio Statistica del Comune di Brescia e con Fondazione Brescia Musei.

L’obiettivo principale del Progetto è stato quello di ottenere informazioni sui visitatori dei principali siti culturali della città di Brescia, sulla base delle quali elaborare opportune strategie di marketing volte, in particolare, a valorizzare al meglio l’offerta museale del territorio e a migliorare l’esperienza di visita degli utenti (DMS StatLab, *dms-statlab.unibs.it*). Per fare questo, sono stati somministrati dei questionari volti a indagare l’esperienza dei visitatori del Parco Archeologico, del Museo di Santa Giulia e della Pinacoteca Tosio-Martinengo. Per la Pinacoteca è stato predisposto anche un questionario aggiuntivo per effettuare un’indagine sensoriale, chiedendo ai visitatori di esprimere, tramite una batteria di scale a differenziale semantico, quali fossero le percezioni sensoriali che associavano alla visita della sala della Pinacoteca nella quale si trovavano.

Lo studio delle applicazioni della Statistica ai luoghi della cultura da parte dell’Università degli Studi di Brescia è proseguito nel corso del tempo, anche grazie al Progetto “Data Science for Brescia – Arts and Cultural Places” (abbreviato con DS4BS, *bodai.unibs.it/ds4bs*), che ha preso avvio nel settembre 2021 e che vede coinvolti il Laboratorio di Statistica “Dati Metodi Sistemi” e il Big&Open Data Innovation Laboratory dell’Ateneo (BODaI-Lab, *bodai.unibs.it*). Il Progetto, finanziato dalla Fondazione Cariplo nell’ambito del bando “Data Science for Science and Society”, è svolto dall’Università con il supporto del Comune di Brescia e di Fondazione Brescia Musei e rientra nelle attività di ricerca a supporto dell’evento Bergamo e Brescia Capitale Italiana della Cultura 2023.

L’obiettivo principale del Progetto DS4BS consiste nell’aumentare la conoscenza riguardo al modo in cui gli utenti visitano i luoghi della cultura della città di Brescia, impiegando la Data Science e le nuove tecnologie per ottenere informazioni che consentano di progettare esperienze di visita sempre più coinvolgenti. Un primo filone di ricerche rientranti nel Progetto si focalizza sugli spostamenti dei visitatori tra i diversi siti culturali della città, che vengono analizzati grazie ai dati georeferenziati provenienti dai segnali di telefonia mobile. Un secondo ambito di ricerca

del Progetto è invece incentrato sull'esperienza di visita dei diversi siti culturali gestiti da Fondazione Brescia Musei, con una particolare attenzione allo studio dell'esperienza sensoriale vissuta dai visitatori.

Durante la visita di un museo, infatti, il senso che viene maggiormente stimolato è certamente la vista; tuttavia, le opere d'arte presenti e tutti gli altri elementi visivi a cui i visitatori sono esposti possono suscitare in loro delle sensazioni non solo relative alla vista, ma riguardanti anche gli altri sensi. Questo fenomeno, che prende il nome di sinestesia, si presta a essere studiato particolarmente bene all'interno della Pinacoteca Tosio-Martinengo di Brescia, nella quale le diverse sale sono caratterizzate da pareti di colori diversi (Pacella, *ilgiorno.it*). Infatti, a seguito di un'importante ristrutturazione, conclusa nel 2018 dopo nove anni di lavori, le pareti di 11 sale sono state rivestite di velluto in otto gradazioni diverse di colore (Gruppo Fallani, *gruppofallani.it*).

Una parte del progetto DS4BS ha quindi lo scopo di indagare l'esperienza multisensoriale di visita, individuando cioè le reazioni sinestesiche che quest'ultima genera, per esempio stimolando la vista attraverso un colore particolare presente nella sala (Rossi, *giornaledibrescia.it*). Si tratta della medesima finalità che ha portato a realizzare il questionario che, nell'estate del 2019, è stato somministrato ai visitatori della Pinacoteca Tosio-Martinengo per effettuare un'indagine sensoriale, raccogliendo informazioni in merito alle emozioni e alle percezioni associate alla visita di una certa sala della Pinacoteca.

#### **4.1.1. L'indagine sensoriale condotta presso la Pinacoteca Tosio-Martinengo**

L'indagine sensoriale presso la Pinacoteca è stata condotta da Giulia Zanoletti che, nell'ambito della sua Tesi di Laurea discussa nel 2019, si è occupata di sottoporre il questionario ai visitatori del museo.<sup>61</sup>

La raccolta delle risposte è avvenuta secondo un piano di campionamento basato sui dati di bigliettazione relativi all'anno precedente, sulla base dei quali sono stati formulati gli obiettivi – in termini di numero di questionari da somministrare – per i mesi di giugno, luglio, agosto e settembre.

---

<sup>61</sup> Le risposte dei visitatori italiani sono state raccolte intervistandoli direttamente di persona, ponendo loro le domande del questionario e annotando le risposte; al contrario, per i turisti stranieri è stata prevista l'auto-compilazione dei questionari (in lingua inglese, francese, tedesca o spagnola).

La prima parte del questionario è caratterizzata da una serie di domande relative alla specifica sala della Pinacoteca nella quale il rispondente si trova al momento della compilazione.<sup>62</sup> Tre sono state le sale oggetto dell'indagine: la numero III, VI e X, caratterizzate da dimensioni simili ma da colori diversi delle pareti, che sono, rispettivamente, azzurre, rosse e verdi.<sup>63</sup>

Al visitatore viene chiesto, anzitutto, quanto tempo abbia trascorso nella sala in cui viene intervistato, rispetto alle altre sale che ha visitato; viene poi richiesto di esprimere le emozioni provate in quel momento e le sensazioni (relative al tatto, all'olfatto, al gusto e alla vista) che si associano alla visita della sala. Le emozioni vengono rilevate chiedendo ai rispondenti di indicare – da “per nulla” a “moltissimo”, su una scala di Likert a 5 punti – in che misura provino gioia, tristezza, rabbia, paura, sorpresa e disgusto. Gli aspetti legati alle percezioni sensoriali, invece, vengono indagati per mezzo di una batteria di 12 scale a differenziale semantico, ognuna con 7 alternative di risposta. Ai rispondenti viene poi chiesto di indicare – su una batteria di *item* in scala di Likert a 5 punti – quanto ciascuno degli aspetti elencati contribuisca a determinare le sensazioni e le emozioni appena dichiarate – scegliendo tra “per nulla”, “poco”, “abbastanza”, “molto” e “moltissimo”.

In seguito, dopo aver chiesto di valutare, su una scala da 1 a 5, il proprio livello di coinvolgimento nell'esperienza, le domande iniziano a concentrarsi sulle motivazioni della decisione di visitare la Pinacoteca. In particolare, ai visitatori viene chiesto di indicare attraverso quale canale siano venuti a conoscenza del museo e con chi abbiano deciso di effettuare la visita. Inoltre, viene chiesto se quella sia la prima volta che ci si reca alla Pinacoteca o, in caso contrario, quale sia stato il principale motivo che ha spinto a ritornare a visitarla.

Agli utenti viene anche chiesto se siano o meno soddisfatti dell'esperienza complessiva di visita, scegliendo tra le alternative di una scala di Likert a 4 punti (“decisamente no”, “forse no”, “forse sì” e “decisamente sì”). Il questionario si conclude raccogliendo i principali dati anagrafici del rispondente: il sesso, l'età, il titolo di studio, il luogo di residenza e la professione.

---

<sup>62</sup> All'inizio del questionario, infatti, l'intervistatore annota il numero della sala in cui il rispondente si trova e alla quale le risposte si riferiscono.

<sup>63</sup> La sala III della Pinacoteca Tosio-Martinengo, le cui pareti sono rivestite di velluto di colore azzurro, contiene alcune opere della collezione Tosio, a tema sacro e collocabili all'inizio del Cinquecento. La sala VI – caratterizzata dalle pareti rivestite di velluto rosso – è dedicata a tre pittori cinquecenteschi: i bresciani Moretto e Savoldo e il veneziano Lotto. La sala X, con le pareti rivestite di velluto verde, sviluppa il tema del Ritratto a metà del Cinquecento, attraverso le principali opere del Rinascimento bresciano e lombardo.

#### 4.1.2. La domanda relativa alle percezioni sensoriali suscitate dalla visita della sala

Il modello CUM può quindi essere impiegato per l'analisi della domanda numero 4 del questionario di analisi sensoriale, che chiede ai visitatori di rispondere a una batteria di 12 scale a differenziale semantico, scegliendo il punto di ogni scala che meglio esprime le percezioni associate alla visita della sala della Pinacoteca in cui si trovano.

Le percezioni indagate riguardano quattro sensi: il tatto, l'olfatto, il gusto e la vista; per ciascuno di essi vengono indagati tre aspetti, ognuno per mezzo di una scala individuata da una coppia di aggettivi di significato opposto, quindi, in totale sono presenti 12 scale a differenziale semantico, che sono quelle riportate nella Figura 4.1.

4. Di seguito troverà delle coppie di aggettivi di significato opposto: osservando tali coppie, annerisca la casella che, tra i due aggettivi estremi, meglio corrisponde alla sua percezione sulla visita della sala:

TATTO	Ruvido	<input type="checkbox"/>	Morbido						
	Spigoloso	<input type="checkbox"/>	Tondeggiante						
	Appiccicoso	<input type="checkbox"/>	Fluidido						
OLFATTO	Soffocante	<input type="checkbox"/>	Fresco						
	Antico	<input type="checkbox"/>	Nuovo						
	Fetido	<input type="checkbox"/>	Aromatico						
GUSTO	Amaro	<input type="checkbox"/>	Dolce						
	Speziato	<input type="checkbox"/>	Fruttato						
	Insipido	<input type="checkbox"/>	Saporito						
VISTA	Glaciale	<input type="checkbox"/>	Tropicale						
	Pallido	<input type="checkbox"/>	Frizzante						
	Offuscato	<input type="checkbox"/>	Limpido						

Figura 4.1. – La batteria di scale a differenziale semantico su cui sarà applicato il modello CUM.  
Fonte: Questionario relativo all'analisi sensoriale svolta presso la Pinacoteca Tosio-Martinengo di Brescia.

La domanda in questione ha lo scopo di ricavare informazioni sulle percezioni sensoriali dei visitatori, chiedendo loro di focalizzarsi sulle sensazioni suscitate in loro dalla visita della singola sala nella quale si trovano mentre rispondono al questionario. L'obiettivo è quello di individuare quali percezioni sensoriali vengono generate, dalla mente dei rispondenti, a seguito della visita alla sala – e cioè sulla base di un insieme di stimoli visivi, relativi alle opere esposte e a tutti gli altri elementi a cui il visitatore è esposto.

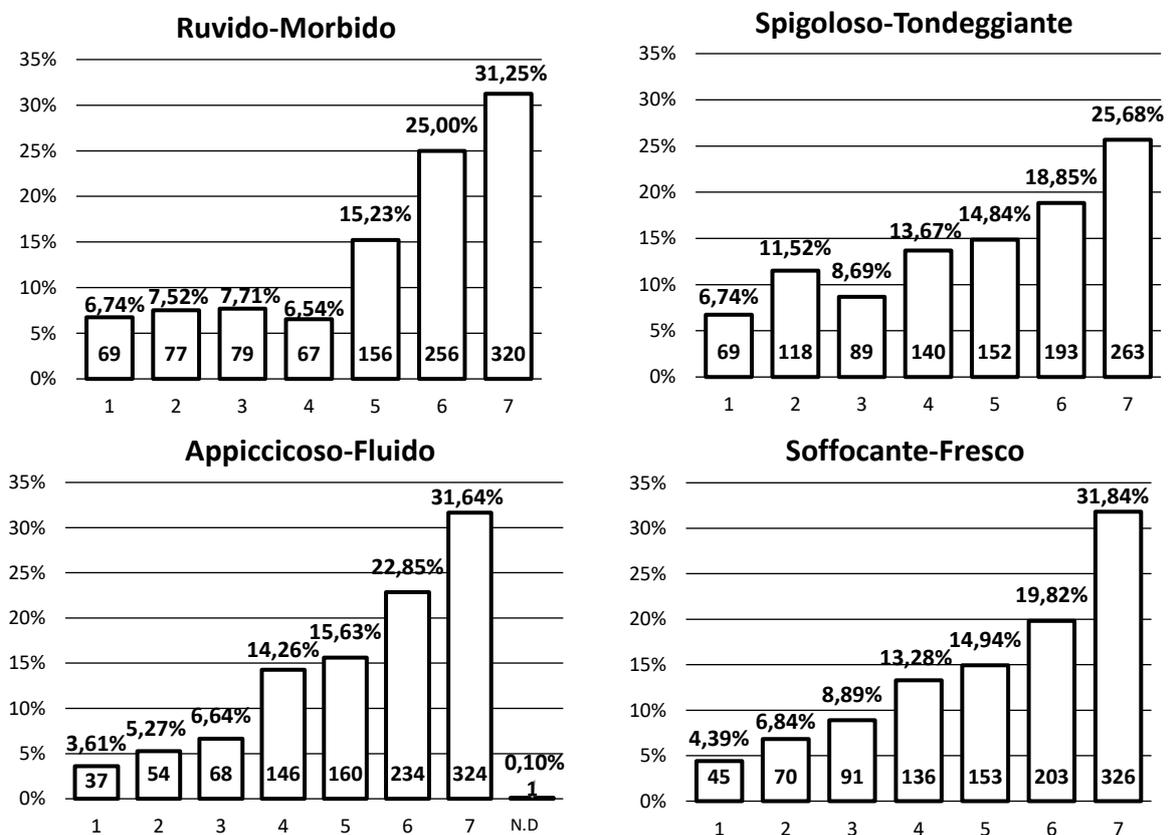
La batteria di scale a differenziale semantico consente ai rispondenti di esprimere le reazioni sensoriali che la vista dei diversi elementi della sala ha suscitato in loro, relativamente ad aspetti legati alla vista stessa, ma anche inerenti agli altri sensi non direttamente coinvolti – in particolare il tatto, l’olfatto e il gusto. In questo modo, è possibile ottenere informazioni sulle cosiddette “risposte sinestesiche”, cioè quelle percezioni che si generano a seguito della stimolazione di un senso (nel caso della Pinacoteca tramite un insieme di elementi visivi), che sono però relative a sensi diversi da quello stimolato. In realtà, il fenomeno della sinestesia può verificarsi anche quando si generano delle risposte relative al senso che è stato esposto agli stimoli (in questo caso la vista), ma attinenti a elementi diversi da quelli a cui la persona è stata effettivamente esposta (per esempio la sensazione di qualcosa di “limpido” o “offuscato” che viene in mente osservando i diversi elementi della sala della Pinacoteca).

Tramite le coppie di aggettivi poste agli estremi delle 12 scale a differenziale semantico, i visitatori vengono guidati nel ricostruire le sensazioni tattili, olfattive, gustative e visive che la visita della sala della Pinacoteca suscita in loro. In particolare, le scale individuate dagli aggettivi “Ruvido-Morbido”, “Spigoloso-Tondeggiante” e “Appiccicoso-Fluidico” consentono di rilevare le percezioni relative al tatto; “Soffocante-Fresco”, “Antico-Nuovo” e “Fetido-Aromatico” fanno invece riferimento alle sensazioni olfattive. “Amaro-Dolce”, “Speziato-Frustrato” e “Insipido-Saporito” rilevano le percezioni gustative, mentre “Glaciale-Tropicale”, “Pallido-Frizzante” e “Offuscato-Limpido” riguardano le percezioni sensoriali relative alla vista.

Per ognuna delle 12 scale a differenziale semantico, al visitatore viene chiesto di scegliere l’alternativa di risposta che meglio rappresenta la sua percezione sensoriale, relativa a un certo aspetto percepibile con uno dei cinque sensi. Il rispondente deve anzitutto capire se orientare la risposta verso l’aggettivo posto sull’estremo sinistro della scala, se scegliere una risposta più sbilanciata verso il termine posizionato sul polo destro, o se prendere una posizione neutrale tra i due aggettivi, scegliendo la categoria centrale della scala. Una volta chiarito che la propria percezione è più adeguatamente descritta da uno dei due aggettivi, il visitatore deve decidere se scegliere l’alternativa più vicina all’estremo nel quale il termine è posizionato – per indicare perfetta corrispondenza tra la sua percezione e l’aggettivo in questione – o se scegliere una delle categorie intermedie tra l’estremo e la categoria centrale della scala.

Le risposte raccolte presso i visitatori della Pinacoteca Tosio-Martinengo sono state in totale 1024; tra queste, soltanto per un rispondente si è in presenza di un *missing data* (in corrispondenza della scala individuata dagli aggettivi “Appiccicoso” e “Fluido”), mentre tutti gli altri visitatori hanno risposto in modo completo a tutte le 12 scale a differenziale semantico. La matrice dei dati relativa alla domanda di analisi sensoriale, quindi, presenta 1024 righe – pari al numero di rispondenti – e 12 colonne – corrispondenti al numero di variabili statistiche generate, in quanto ogni scala a differenziale semantico corrisponde a una variabile qualitativa ordinale. I valori contenuti nella matrice – salvo per il caso del *missing data* – sono tutti dei numeri naturali compresi tra 1 e 7, dove “1” rappresenta la prima categoria della scala, in corrispondenza dell’estremo sinistro, e “7” indica l’ultima alternativa di risposta, in prossimità del polo destro della scala.

La Figura 4.2. riporta la distribuzione di frequenze delle risposte che sono state raccolte sulle 12 scale a differenziale semantico, sottoponendo il questionario ai 1024 visitatori della Pinacoteca nei mesi estivi del 2019. Diversi sono i casi in cui le alternative di risposta rappresentate dai numeri più alti (corrispondenti all’estremo di destra) presentano le frequenze più elevate; in altri casi è la categoria centrale quella più frequente, ma ci sono anche scale in cui le frequenze delle prime categorie risultano le più elevate e altre in cui le frequenze sono tutte piuttosto simili tra loro.



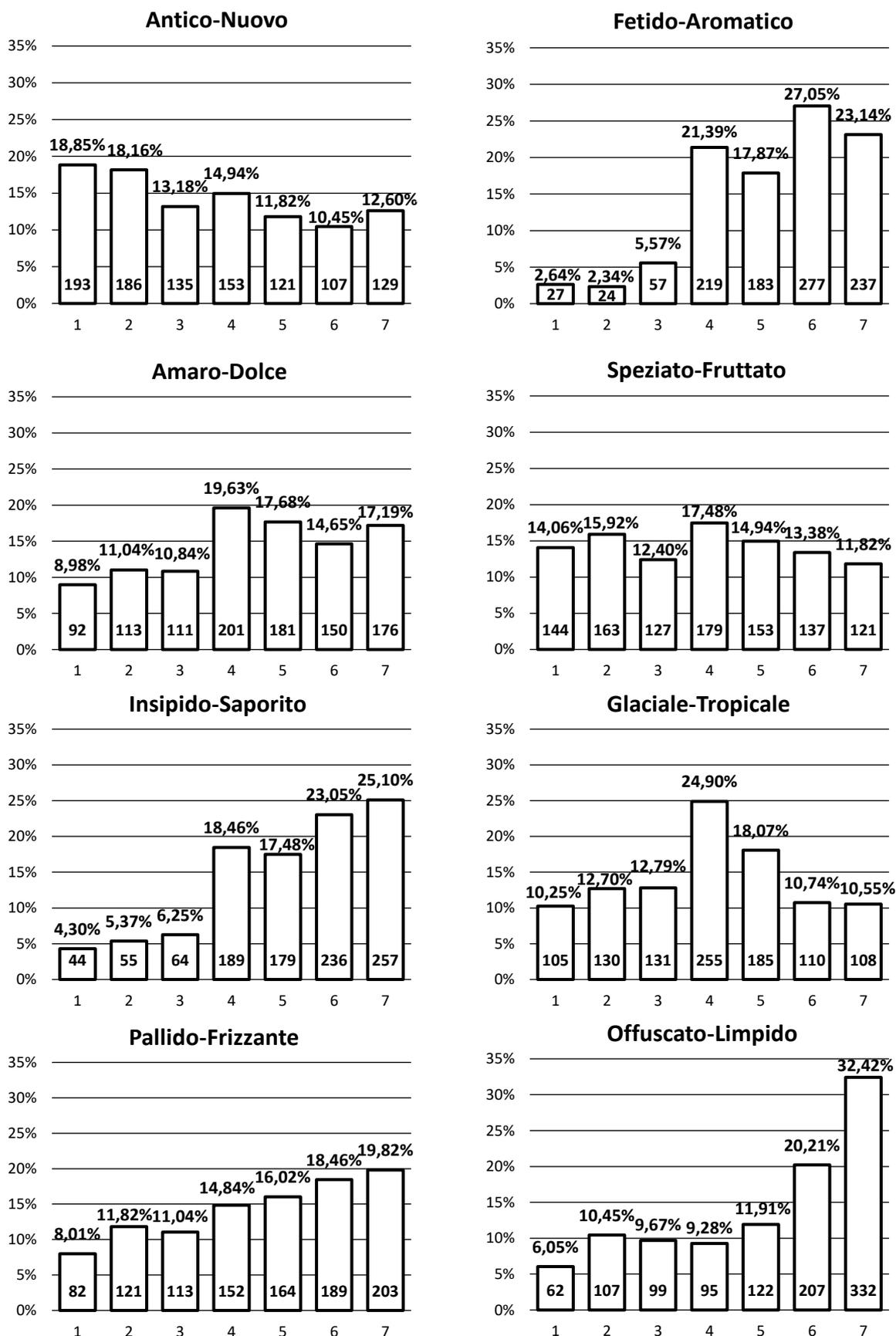


Figura 4.2. – Distribuzione di frequenze relative (in percentuale) e assolute (nella parte bassa di ogni grafico) delle risposte ottenute alla Domanda 4 del questionario.

Fonte: Nostre elaborazioni sulle risposte al questionario di analisi sensoriale svolto presso la Pinacoteca.

## 4.2. Impiego del modello CUM per l'analisi delle percezioni dei visitatori

L'obiettivo del modello CUM è quello di stimare i valori dei parametri  $\hat{\pi}$ ,  $\hat{\xi}_D$  e  $\hat{\xi}_U$  per i quali è più verosimile che la distribuzione di probabilità associata al modello permetta di ottenere le risposte che sono state osservate per ognuna<sup>64</sup> delle scale a differenziale semantico. Se, in corrispondenza di questi valori stimati, il modello è in grado di adattarsi bene ai dati osservati, essi possono essere impiegati per fare delle considerazioni in merito alle componenti di *feeling* e di incertezza che si può ritenere abbiano caratterizzato il processo psicologico di risposta.

### 4.2.1. Livello di adattamento del modello CUM e confronto con il modello CUB

Come prima cosa, dopo aver ottenuto le stime dei parametri del modello CUM, è necessario valutare il livello di adattamento del modello alle 1024 risposte osservate, verificando che il valore dell'indice di dissimilarità sia piuttosto contenuto. La Tabella 4.1. mostra, per ciascuna delle 12 scale a differenziale semantico, i valori dell'indice  $Diss = \sum_{r=1}^m \frac{1}{2} \cdot |f_r - p_r|$  relativi al modello CUM, che può essere utile confrontare con quelli che si otterrebbero applicando il modello CUB.

Tabella 4.1. – Livello di adattamento e *information criteria* relativi ai modelli CUM e CUB.  
Fonte: nostre elaborazioni, applicando il modello CUM alle risposte dei 1024 visitatori della Pinacoteca.

Scala a differenziale semantico	Modello CUM			Modello CUB		
	<i>Diss</i>	AIC	BIC	<i>Diss</i>	AIC	BIC
Ruvido-Morbido	0,0274	3595	3610	0,0323	<u>3594</u>	<u>3603</u>
Spigoloso-Tondeggiante	0,0507	3839	3854	0,0692	3846	3856
Appiccicoso-Fluidico	0,0593	3564	3579	0,0941	3600	3610
Soffocante-Fresco	0,0570	3663	3678	0,0910	3691	3701
Antico-Nuovo	0,0326	3956	3971	0,0312	<u>3954</u>	<u>3964</u>
Fetido-Aromatico	0,0959	3499	3514	0,1399	3536	3546
Amaro-Dolce	0,0671	3941	3956	0,0769	3948	3958
Speziato-Fruttato	0,0449	3987	4001	0,0461	<u>3985</u>	<u>3994</u>
Insipido-Saporito	0,0774	3665	3680	0,1226	3700	3709
Glaciale-tropicale	0,0235	3883	3898	0,0674	3903	3913
Pallido-Frizzante	0,0376	3922	3936	0,0494	3927	3937
Offuscato-Limpido	0,0274	3694	3709	0,0326	<u>3692</u>	<u>3702</u>

<sup>64</sup> Il modello CUM (Manisera e Zuccolotto, 2022) – così come il modello CUB (D'Elia e Piccolo, 2005) – non è una tecnica statistica multivariata (Corduas, 2014), infatti, anche in presenza di una batteria di scale ordinali, la stima dei parametri verrà effettuata prendendo in considerazione una scala alla volta.

I valori riportati nella Tabella 4.1. mostrano che il livello di adattamento del modello CUM risulta soddisfacente per tutte le 12 scale a differenziale semantico, in quanto l'indice di dissimilarità assume al massimo un valore di 0.0959 (per la scala "Fetido-Aromatico"). Questo significa che, per ognuna delle scale, sarebbe necessario cambiare meno del 10% delle risposte per fare in modo che il modello si adatti perfettamente ai dati osservati. Di conseguenza, almeno il 90% delle risposte osservate riesce a essere rappresentato dal modello CUM.

Per le scale "Glaciale-Tropicale", "Ruvido-Morbido" e "Offuscato-Limpido" l'indice di dissimilarità risulta inferiore al 3%; esso assume valori contenuti anche nel caso di "Antico-Nuovo", "Pallido-Frizzante", "Speziato-Fruttato", "Spigoloso-Tondeggiante", "Soffocante-Fresco" e "Appiccicoso-Fluidi", per le quali si attesta al di sotto del 6%. Infine, valori più elevati – ma sempre inferiori all'8% – dell'indice di dissimilarità si riscontrano per le scale "Amaro-Dolce" e "Insidido-Saporito" e per la scala "Fetido-Aromatico", che presenta una dissimilarità inferiore al 10%, indicando comunque un livello di adattamento accettabile del modello CUM alle risposte osservate.

La Tabella 4.1. permette anche di confrontare i valori dell'indice di dissimilarità del modello CUM con quelli che si otterrebbero applicando il modello CUB. In quasi tutti i casi il CUM riesce ad adattarsi meglio ai dati, grazie alla presenza di due parametri di *feeling*, che forniscono maggiore flessibilità alla distribuzione della variabile casuale CUM. Anche per le scale a differenziale semantico per le quali il livello di adattamento del modello CUB non risulta del tutto soddisfacente ("Fetido-Aromatico" e "Insidido-Saporito", in cui l'indice *Diss* risulta pari a 0,1399 e 0,1226), il modello CUM riesce a ottenere un livello di adattamento accettabile. Soltanto nel caso della scala caratterizzata dalla coppia di aggettivi "Antico-Nuovo" l'indice di dissimilarità del modello CUB risulta inferiore, seppur di poco rispetto al CUM (0,0312 anziché 0,0326). Ad ogni modo, i due valori sono molto vicini tra loro e, soprattutto, risultano molto contenuti, denotando entrambi un livello di adattamento ampiamente soddisfacente.

Quanto appena presentato è coerente con il risultato che si ottiene generalmente, cioè che, tra due modelli, quello caratterizzato da un maggior numero di parametri (in questo caso il CUM) riesce ad adattarsi meglio ai dati osservati rispetto al modello che presenta un numero inferiore di parametri (il CUB). Tuttavia, la minore parsimonia del modello – cioè la presenza di più parametri – ne aumenta la complessità; la funzione di verosimiglianza da massimizzare, infatti,

risulterà più complessa e sarà quindi richiesto un maggiore sforzo computazionale per ottenere le stime dei parametri da cui essa dipende.

La scelta tra due modelli alternativi caratterizzati da un diverso numero di parametri, quindi, dovrà bilanciare la bontà della rappresentazione – cioè il livello di adattamento garantito da ciascun modello – con la complessità legata alla presenza di più parametri (Liddle, 2007). Per fare questo, sono stati sviluppati degli *information criteria*<sup>65</sup>; essi hanno l’obiettivo di associare ai diversi modelli alternativi un valore numerico, sulla base del quale sarà possibile scegliere il modello più opportuno da utilizzare per l’analisi dei dati; generalmente verrà scelto il modello caratterizzato dal valore più contenuto dell’*information criterion* (Liddle, 2007).

Il valore degli *information criteria* dovrà tenere conto di due elementi: il numero dei parametri sui quali il modello si fonda, e il valore che la funzione di log-verosimiglianza assume in corrispondenza delle stime di massima verosimiglianza ottenute per i parametri del modello. A parità di log-verosimiglianza, più il numero dei parametri sarà alto e più elevato dovrà risultare l’indice, in modo che il modello più complesso risulti più penalizzato rispetto a quello più semplice. In generale, si sceglie il modello che garantisce il minimo valore dell’indice selezionato, con un bilanciamento tra il valore assunto dalla log-verosimiglianza della penalizzazione legata al numero di parametri.

Gli indici AIC e BIC riportati in Tabella 4.1. – sia per il modello CUM, sia per il CUB – rappresentano due *information criteria* che vengono frequentemente impiegati per la scelta del modello statistico da utilizzare. L’indice AIC – acronimo di “Akaike<sup>66</sup> Information Criterion” (Liddle, 2007) – si calcola sulla base della seguente formula:

$$AIC = -2 \cdot \log(\mathcal{L}_{MAX}) + 2 \cdot k,$$

dove  $\log(\cdot)$  rappresenta il logaritmo naturale, mentre  $k$  esprime il numero di parametri<sup>67</sup> dai quali dipende il modello, e  $\mathcal{L}_{MAX}$  rappresenta il valore massimo che la funzione di verosimiglianza assume in corrispondenza delle stime dei parametri (che corrispondono proprio a quei valori che consentono di massimizzare tale funzione e, pertanto, sono definite stime di massima verosimiglianza).

---

<sup>65</sup> In termini formali, gli *Information Criteria* potrebbero essere definiti come “una formulazione matematica del principio di parsimonia nella costruzione di un modello” (Schwarz, 1978).

<sup>66</sup> Il nome di questo *information criterion* deriva da Hirotugu Akaike, che lo ha definito nel 1974 (Akaike, 1974).

<sup>67</sup> Nel calcolo dell’indice AIC va tenuto conto del numero di parametri indipendenti del modello (Akaike, 1974).

L'indice BIC – che significa “Bayesian Information Criterion” (Liddle, 2007) – è invece dato da:

$$\text{BIC} = -2 \cdot \log(\mathcal{L}_{MAX}) + k \cdot \log(n),$$

dove, analogamente al caso precedente,  $\log(\cdot)$  rappresenta il logaritmo naturale,  $k$  esprime il numero di parametri del modello, e  $\mathcal{L}_{MAX}$  rappresenta il valore massimo assunto dalla funzione di verosimiglianza; calcolando il logaritmo naturale di  $\mathcal{L}_{MAX}$ , si ottiene il valore massimo della funzione di log-verosimiglianza associata al modello. Il valore  $n$ , invece, esprime il numero di osservazioni campionarie che si desidera rappresentare attraverso il modello statistico; nel caso dei modelli CUM e CUB,  $n$  esprime il numero di risposte da analizzare.<sup>68</sup>

Dalla Tabella 4.1. si può notare che, per la maggior parte delle scale a differenziale semantico, gli indici AIC e BIC risultano inferiori nel caso del modello CUM: la maggiore complessità dovuta alla presenza di un ulteriore parametro da stimare risulta giustificata dal considerevole miglioramento nel valore massimo della funzione di log-verosimiglianza. Al contrario, per le scale “Ruvido-Morbido”, “Antico-Nuovo”, “Speziato-Fruttato” e “Offuscato-Limpido” sembrerebbe più conveniente l'utilizzo del modello CUB.

Trattandosi però di risposte raccolte su scale a differenziale semantico, andrebbe anche considerato che la presenza di un parametro aggiuntivo nel modello CUM, oltre a consentire di raggiungere valori più elevati della funzione di verosimiglianza, fornisce un potere informativo superiore, visto che consente di specificare meglio la natura del *feeling* dei rispondenti.

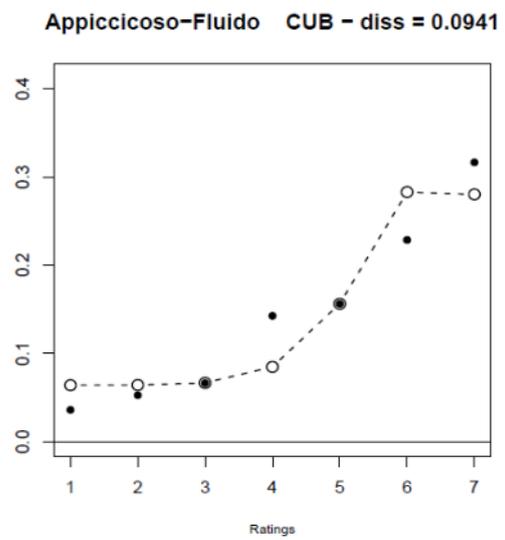
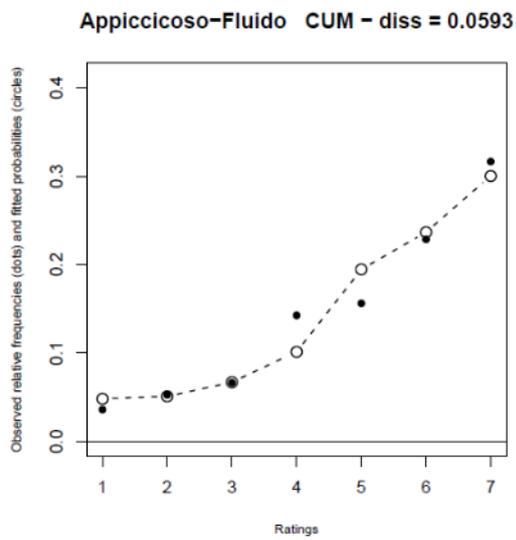
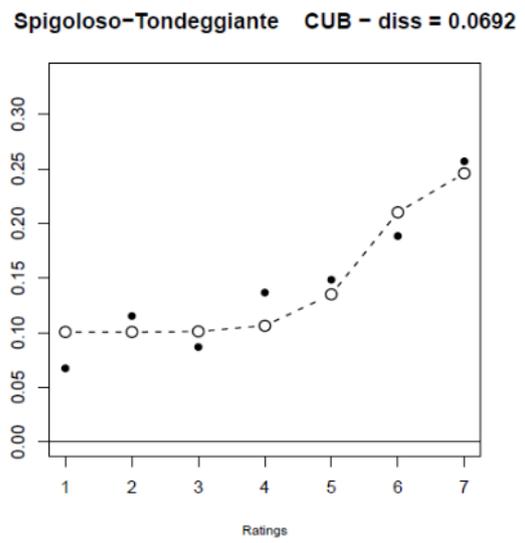
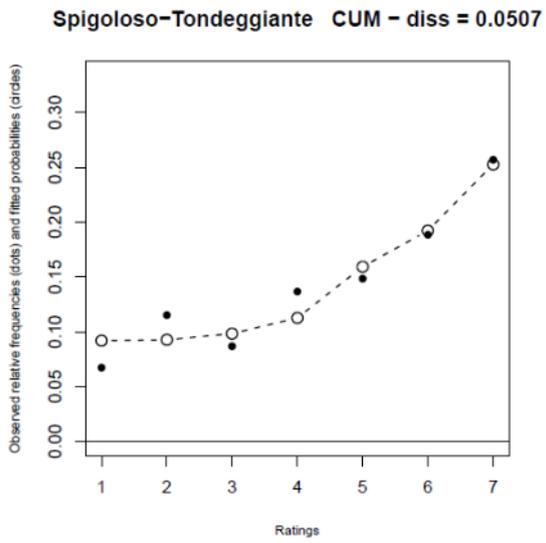
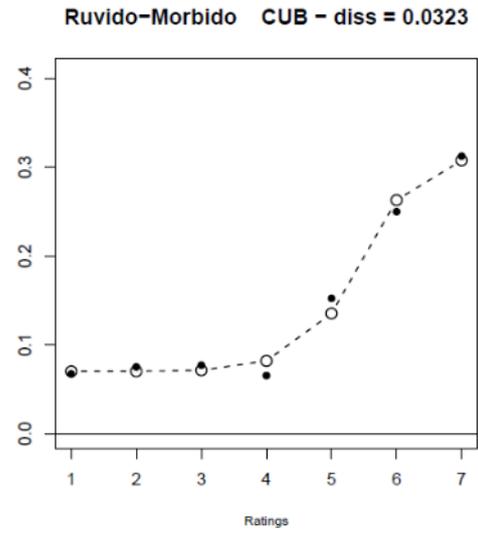
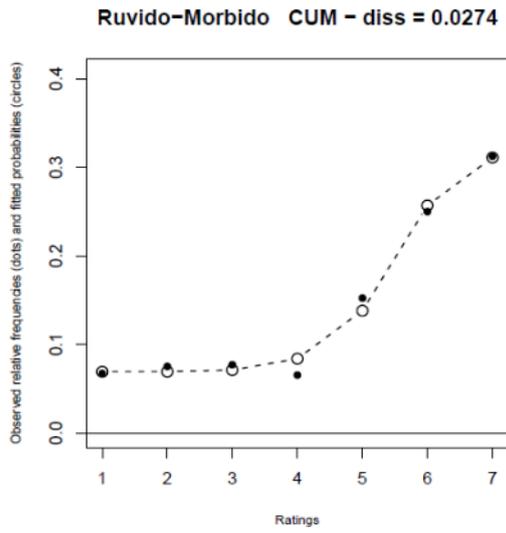
#### **4.2.2. Confronto tra le frequenze osservate e le probabilità stimate dai due modelli**

Il valore dell'indice di dissimilarità esprime il divario tra le frequenze relative delle risposte osservate e le probabilità associate a ciascuna alternativa di risposta, determinate sulla base del modello statistico utilizzato e in corrispondenza dei valori stimati dei parametri che lo caratterizzano.

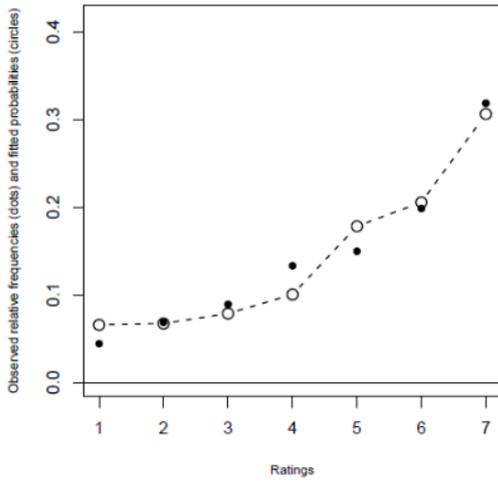
La Figura 4.3. mostra – sia per il modello CUM, sia per il modello CUB – la distribuzione delle frequenze osservate e delle probabilità stimate dai modelli.

---

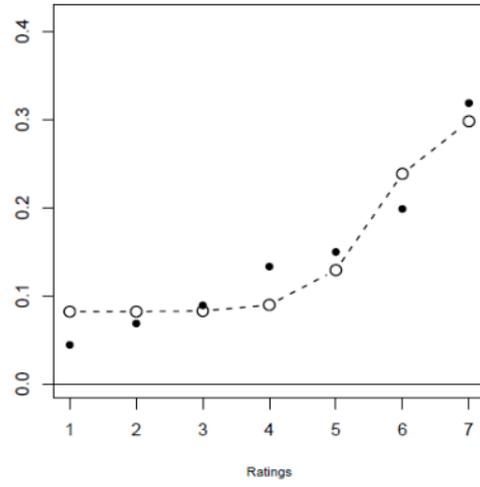
<sup>68</sup> Quando il numero di risposte è sufficientemente elevato, come nel caso del questionario di indagine sensoriale svolto presso la Pinacoteca, l'indice BIC porta a una maggiore penalizzazione del modello che utilizza più parametri (il CUM) rispetto a quello più parsimonioso (il CUB). Infatti, se le risposte raccolte sono 1024,  $\log(1024) \cong 6,93$ , che risulta quindi superiore al valore di 2 utilizzato nell'indice AIC. Lo stesso vale anche qualora si analizzassero i soli dati raccolti in una delle sale della Pinacoteca, in ognuna delle quali sono state raccolte più di 300 risposte, come verrà presentato in seguito. È infatti sufficiente che il numero di osservazioni campionarie sia almeno pari a 8 perché ciò si verifichi (dato che  $e^2 = 7,38$ , quindi  $\log(x) > 2$  è vero per valori di  $x > 7,38$ ).



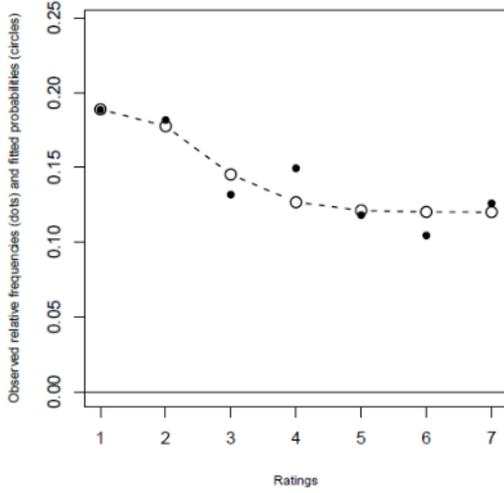
**Soffocante-Fresco CUM - diss = 0.057**



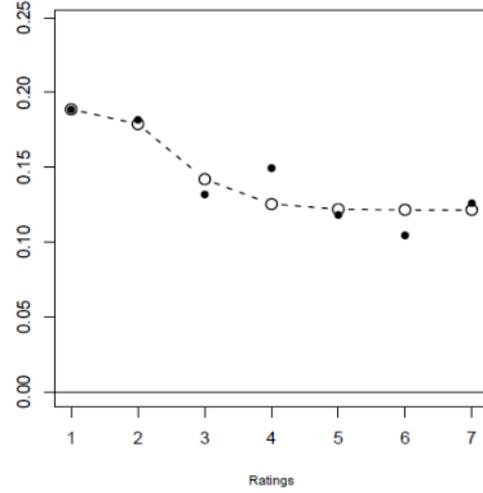
**Soffocante-Fresco CUB - diss = 0.091**



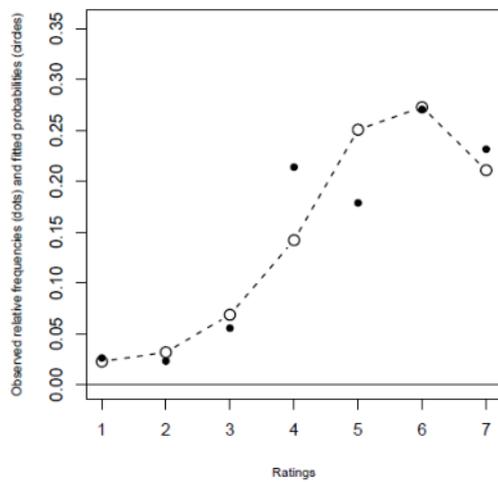
**Antico-Nuovo CUM - diss = 0.0326**



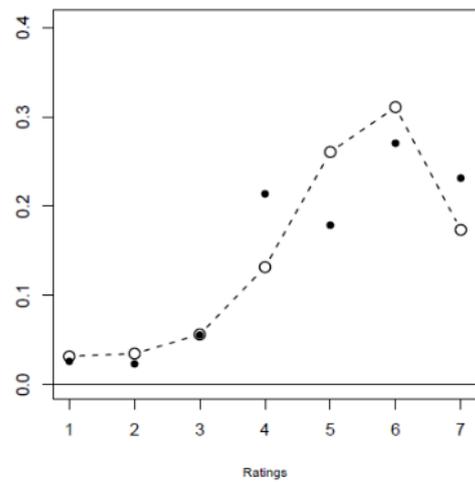
**Antico-Nuovo CUB - diss = 0.0312**



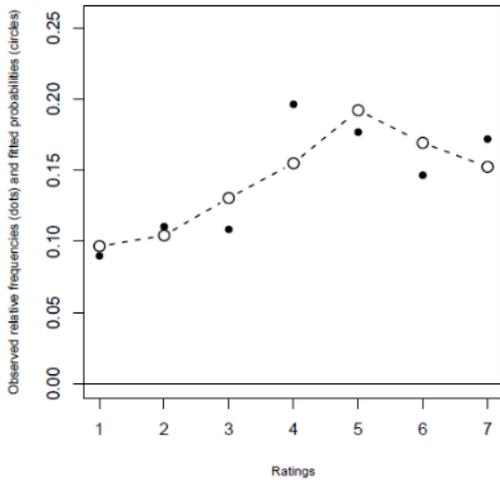
**Fetido-Aromatico CUM - diss = 0.0959**



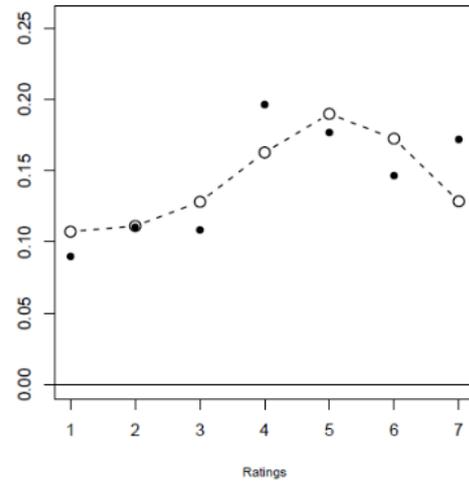
**Fetido-Aromatico CUB - diss = 0.1399**



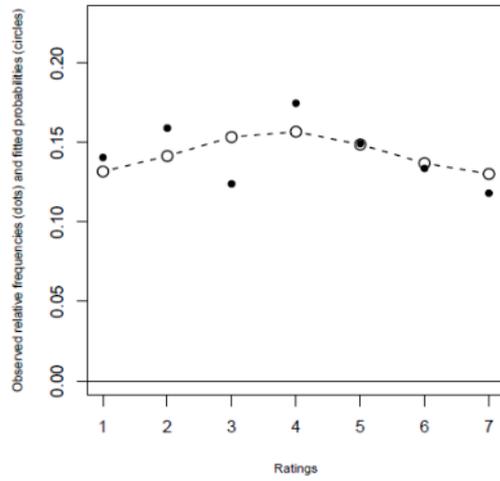
**Amaro-Dolce CUM - diss = 0.0671**



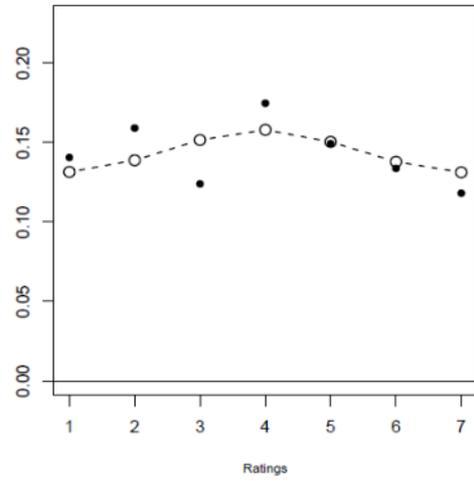
**Amaro-Dolce CUB - diss = 0.0769**



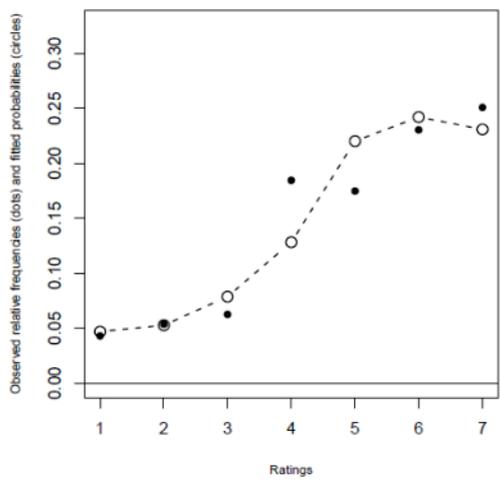
**Speziato-Fruttato CUM - diss = 0.0449**



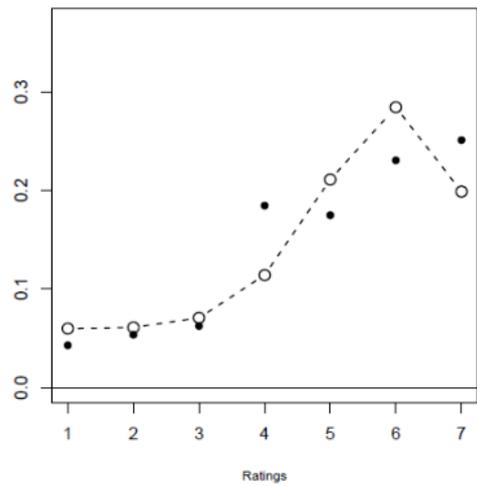
**Speziato-Fruttato CUB - diss = 0.0461**



**Inspido-Saporito CUM - diss = 0.0774**



**Inspido-Saporito CUB - diss = 0.1226**



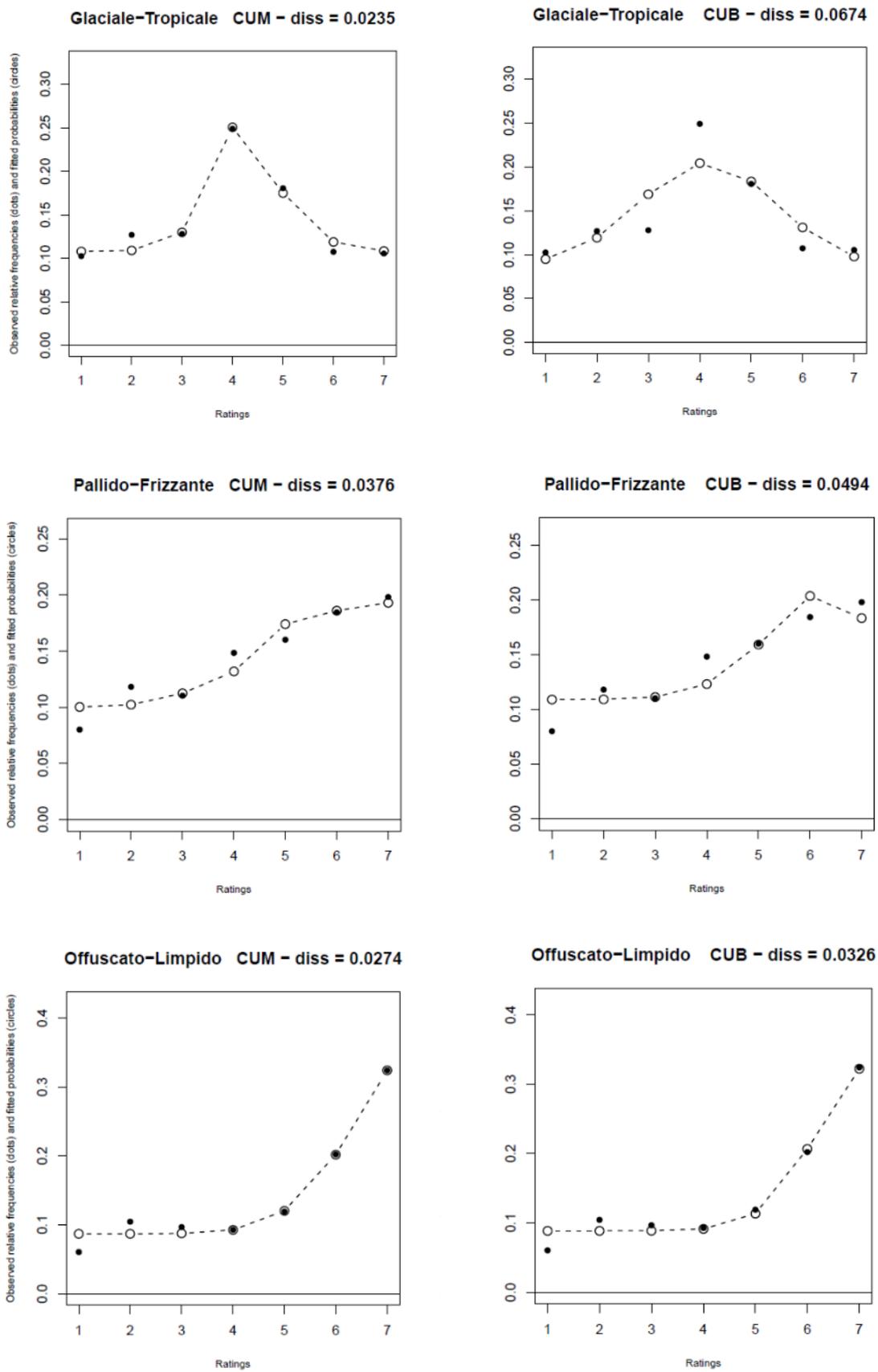


Figura 4.3. – Distribuzione delle frequenze osservate (●) e delle probabilità stimate (○) dal modello CUM (grafici a sinistra) e CUB (grafici a destra).

Fonte: Nostre elaborazioni, applicando il modello CUM alle risposte dei 1024 visitatori della Pinacoteca.

La Figura 4.3. mostra anche la forma che assume la distribuzione di probabilità della variabile casuale associata ai modelli CUM e CUB – grazie alla linea tratteggiata che unisce i punti bianchi, che rappresentano le probabilità stimate per ognuna delle alternative di risposta.

Per alcune scale a differenziale semantico (in particolare “Ruvido-Morbido”, “Antico-Nuovo”, “Speziato-Fruttato” e “Offuscato-Limpido”) la forma delle funzioni di massa di probabilità delle variabili casuali associate ai due modelli risulta molto simile. Si tratta dei casi in cui già il modello CUB presenta un livello di adattamento molto buono (segnalato dai bassi valori dell’indice di dissimilarità), che nel modello CUM migliora leggermente – salvo nel caso della scala “Antico-Nuovo”, che presenta un minimo peggioramento dell’indice di dissimilarità, che risulta di poco superiore nel caso del CUM.

Per le restanti scale a differenziale semantico, la differenza tra la forma delle distribuzioni di probabilità del modello CUM e del CUB risulta più evidente, tipicamente in corrispondenza delle ultime alternative di risposta – relative al polo destro delle scale – che sono quelle che si presentano più frequentemente nelle risposte osservate. Questo vale in particolare per le scale “Spigoloso-Tondeggiante”, “Appiccicoso-Fluidico”, “Soffocante-Fresco”, “Fetido-Aromatico”, “Amaro-Dolce”, “Insipido-Saporito” e “Pallido-Frizzante”. Relativamente alla scala “Glaciale-Tropicale”, la differenza più sostanziale tra il modello CUM e il CUB si riscontra nelle alternative di risposta centrali, che sono quelle scelte con la maggiore frequenza. Nelle otto scale a differenziale semantico appena menzionate, le differenze nei grafici in Figura 4.3. relativi ai due modelli si devono al fatto che il CUM gode di maggiore flessibilità, grazie alla presenza dei due parametri di *feeling*. Questo consente alla variabile casuale associata al modello di assumere forme anche sensibilmente diverse da quelle che si otterrebbero applicando il CUB, dalle quali deriva il migliore adattamento del modello CUM alle risposte osservate.

#### **4.3. Risultati dell’applicazione del modello CUM alle 1024 risposte osservate**

Fornendo in input le risposte ottenute dai 1024 visitatori della Pinacoteca Tosio-Martinengo riguardo alle loro percezioni sensoriali, il modello CUM restituirà come output – per ognuna delle 12 scale a differenziale semantico – il vettore  $\hat{\theta} = [\hat{\pi}, \hat{\xi}_D, \hat{\xi}_U]'$  contenente i valori stimati dei tre parametri del modello. A partire dal valore stimato di  $\hat{\pi}$  sarà possibile ottenere il valore che il parametro di incertezza (cioè  $1 - \hat{\pi}$ ) assume nella singola scala. Sulla base dei valori stimati  $\hat{\xi}_D$  e  $\hat{\xi}_U$  si potrà invece ottenere la terza misura di *feeling* del modello CUM (data dal

complemento a 1 di  $\widehat{\xi}_D$  e  $\widehat{\xi}_U$ , ossia  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ ), che corrisponde alla probabilità che un giudizio elementare sia di tipo “neutro”, e, perciò, esprime il *feeling* verso l’alternativa di risposta centrale della scala a differenziale semantico.

Anche in questo caso può essere utile confrontare le stime dei parametri del modello CUM con quelle che si otterrebbero applicando il modello CUB alle 1024 risposte raccolte, contenute nel vettore  $\hat{\theta} = [\hat{\pi}, \hat{\xi}]'$ . Analogamente al modello CUM, anche per il CUB può risultare più utile considerare il complemento a 1 del valore stimato  $\hat{\pi}$ , che rappresenta la stima del parametro di incertezza ( $1 - \hat{\pi}$ ). Anche il valore stimato relativo al parametro di *feeling* del modello CUB, cioè  $1 - \hat{\xi}$ , si ottiene calcolando il complemento a 1 del valore  $\hat{\xi}$  ottenuto in output.

Le stime  $\hat{\pi}$ ,  $\widehat{\xi}_D$  e  $\widehat{\xi}_U$  per il modello CUM – così come i valori stimati  $\hat{\pi}$  e  $\hat{\xi}$  per il CUB – si ottengono dalla massimizzazione della funzione di verosimiglianza effettuata applicando l’algoritmo EM. Nel caso dell’indagine sensoriale svolta presso la Pinacoteca Tosio-Martinengo, tuttavia, in una delle scale a differenziale semantico (quella caratterizzata dalla coppia di aggettivi “Glaciale-Tropicale”) l’algoritmo EM non riesce a convergere, cioè a individuare i valori ( $\hat{\pi}$ ,  $\widehat{\xi}_D$ ,  $\widehat{\xi}_U$ ) che rendono massima la funzione di verosimiglianza del modello CUM. In questo caso, quindi, la stima di  $\hat{\pi}$ ,  $\widehat{\xi}_D$  e  $\widehat{\xi}_U$  è stata effettuata impiegando un algoritmo alternativo di massimizzazione della funzione di verosimiglianza<sup>69</sup>, impostando come valori iniziali  $\pi^{(0)} = 0,1$ ,  $\xi_D^{(0)} = 0,01$  e  $\xi_U^{(0)} = 0,01$ . Questi valori sono stati scelti sulla base della distribuzione di frequenze delle risposte relative alla scala a differenziale semantico “Glaciale-Tropicale”, dalla quale si può notare che le alternative diverse da quella centrale si presentano tutte con una frequenza piuttosto simile tra loro; la componente di incertezza soggettiva (misurata da  $1 - \hat{\pi}$ ) risulterà quindi elevata, il che giustifica il valore basso di  $\pi^{(0)}$ . Visto che la categoria centrale (indicata con il numero “4”) presenta una frequenza significativamente più alta rispetto alle altre, si può invece presumere che il valore di  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$  (che esprime la probabilità che un giudizio elementare sia di tipo “neutro”) sarà elevato; di conseguenza, i due valori  $\widehat{\xi}_D$  e  $\widehat{\xi}_U$  (cioè le probabilità che i giudizi elementari siano “negativi” e “positivi”) dovranno risultare contenute.

---

<sup>69</sup> Per la stima dei parametri relativi alla scala “Glaciale-Tropicale”, al posto dell’algoritmo EM – che, anche scegliendo opportuni valori iniziali, non riusciva a convergere – è stato impiegato l’algoritmo Newton-Raphson (NR); si tratta di un altro metodo numerico che può essere impiegato per ottenere le stime di massima verosimiglianza del modello (McCulloch, 1997).

La Tabella 4.2. riporta i valori stimati di  $\hat{\pi}$ ,  $\widehat{\xi}_D$  e  $\widehat{\xi}_U$ , insieme al valore stimato del parametro di incertezza  $1 - \hat{\pi}$  e di  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ ; inoltre, vengono riportati anche i valori stimati di  $\hat{\pi}$  e  $\hat{\xi}$  relativi al modello CUB, con i loro complementi a 1,  $1 - \hat{\pi}$  e  $1 - \hat{\xi}$ .

Tabella 4.2. – Valori stimati dei parametri del modello CUM e del modello CUB (i numeri tra parentesi rappresentano il valore degli *standard error*).

Fonte: Nostre elaborazioni, applicando il modello CUM alle risposte dei 1024 visitatori della Pinacoteca.

Item	MODELLO CUM					MODELLO CUB			
	$\hat{\pi}$	$1 - \hat{\pi}$	$\widehat{\xi}_D$	$\widehat{\xi}_U$	$1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$	$\hat{\pi}$	$1 - \hat{\pi}$	$\hat{\xi}$	$1 - \hat{\xi}$
Ruvido-Morbido	0,5153 (0,0302)	0,4847	<u>0,0218</u> (0,0163)	0,7771 (0,0152)	0,2011 (0,0226)	0,5084 (0,0267)	0,4916	0,1191 (0,0086)	0,8809
Spigoloso-Tondeggiante	0,3571 (0,0369)	0,6429	0,0741 (0,0197)	0,7664 (0,0254)	0,1595 (0,0219)	0,2958 (0,0304)	0,7042	0,1117 (0,0164)	0,8883
Appiccicoso-Fluidido	0,6653 (0,0343)	0,3347	0,0954 (0,0122)	0,7240 (0,0152)	0,1806 (0,014)	0,5510 (0,0316)	0,4490	0,1443 (0,0111)	0,8557
Soffocante-Fresco	0,5449 (0,0373)	0,4551	0,0903 (0,0146)	0,7619 (0,0188)	0,1478 (0,0147)	0,4276 (0,0305)	0,5724	0,1076 (0,0124)	0,8924
Antico-Nuovo	0,1593 (0,0374)	0,8407	0,7554 (0,0523)	<u>0,0337</u> (0,0434)	0,2109 (0,0449)	0,1493 (0,0294)	0,8507	0,8753 (0,0283)	0,1247
Fetido-Aromatico	0,8516 (0,027)	0,1484	0,1259 (0,0109)	0,6061 (0,0122)	0,2680 (0,0157)	0,7779 (0,0287)	0,2221	0,2470 (0,0081)	0,7530
Amaro-Dolce	0,3453 (0,05)	0,6547	0,2078 (0,0274)	0,5544 (0,0335)	0,2378 (0,0373)	0,2517 (0,0392)	0,7483	0,3359 (0,0284)	0,6641
Speziato-Fruttato	0,1011 (0,0568)	0,8989	0,3244 (0,178)	0,2639 (0,0958)	0,4117 (0,2144)	0,0897 (0,0411)	0,9103	0,5069 (0,0786)	0,4931
Insidido-Saporito	0,6802 (0,0352)	0,3198	0,1226 (0,013)	0,6482 (0,0151)	0,2292 (0,0167)	0,5809 (0,0339)	0,4191	0,2121 (0,0113)	0,7879
*Glaciale-tropicale	0,2447 (0,0333)	0,7553	<u>0,0442</u> (0,0273)	0,1343 (0,0252)	0,8215 (0,0404)	0,3662 (0,0385)	0,6338	0,4787 (0,0183)	0,5213
Pallido-Frizzante	0,3015 (0,0432)	0,6985	0,1152 (0,0293)	0,6762 (0,0329)	0,2086 (0,0324)	0,2362 (0,0341)	0,7638	0,1750 (0,0252)	0,8251
Offuscato-Limpido	0,3924 (0,0306)	0,6076	<u>0,0177</u> (0,0149)	0,8458 (0,0183)	0,1365 (0,0175)	0,3796 (0,0261)	0,6205	0,0776 (0,0096)	0,9224

\* Per la scala "Glaciale-Tropicale" le stime relative al modello CUM sono state ottenute applicando l'algoritmo Newton-Raphson (NR).

I valori riportati tra parentesi nella Tabella 4.2. rappresentano gli errori standard (o *standard error*) delle stime dei parametri dei modelli CUM e CUB. Ciascuna di queste stime – ottenute con il metodo della massima verosimiglianza – può essere ricavata da uno stimatore, cioè una funzione delle osservazioni campionarie (in questo caso le 1024 risposte raccolte). Tale stimatore di massima verosimiglianza corrisponde a una variabile casuale il cui valore atteso, all'aumentare dell'ampiezza del campione estratto, tenderà al parametro di interesse che si desidera stimare<sup>70</sup> (Hogg, McKean, Craig, 2019, p. 427). Lo stimatore sarà anche caratterizzato da una certa variabilità, che può essere misurata proprio attraverso lo *standard error*, che, infatti, rappresenta la deviazione standard dello stimatore (Malhotra, 2020, p. 390).<sup>71</sup>

Il confronto tra il valore stimato di un certo parametro di interesse e il valore dell'errore standard, quindi, permette di valutare l'affidabilità della stima ottenuta. Lo *standard error*, infatti, misurando la variabilità dello stimatore, indica il livello di dispersione del valore di quest'ultimo attorno al suo valore atteso – il cui valore tende al valore del parametro che si vuole stimare ( $\hat{\pi}$ ,  $\widehat{\xi}_D$  o  $\widehat{\xi}_U$  nel modello CUM e  $\hat{\pi}$  o  $\hat{\xi}$  nel CUB). Pertanto, quando lo *standard error* risulta contenuto rispetto al valore stimato del parametro al quale si riferisce, la stima può ritenersi affidabile.<sup>72</sup>

Come si nota dalla Tabella 4.2, nel caso del modello CUB tutti i valori stimati per i due parametri  $\hat{\pi}$  e  $\hat{\xi}$  risultano sensibilmente più alti dei relativi errori standard: le stime si possono quindi

<sup>70</sup> Lo stimatore di massima verosimiglianza risulta quindi asintoticamente corretto (Hogg, McKean, Craig, 2019, p. 727).

<sup>71</sup> I valori degli *standard error* delle stime, nel caso dei modelli CUM e CUB, vengono calcolati a partire dalla matrice di varianza-covarianza, che rappresenta l'inversa della matrice di informazione osservata – la quale, a sua volta, corrisponde all'opposto della matrice Hessiana, contenente le derivate seconde parziali della funzione di log-verosimiglianza (Manisera e Zuccolotto, 2022). Gli errori standard si ottengono quindi estraendo la radice quadrata degli elementi della diagonale principale della matrice di varianza-covarianza, che rappresentano le varianze degli stimatori impiegati per ottenere le stime dei parametri  $\hat{\pi}$  e  $\hat{\xi}$  per il modello CUB, e  $\hat{\pi}$ ,  $\widehat{\xi}_D$  e  $\widehat{\xi}_U$  per il modello CUM. In quest'ultimo caso, il quarto *standard error* riportato in Tabella 4.2, relativo a  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ , si può calcolare come  $s.e._{(1-\widehat{\xi}_D-\widehat{\xi}_U)} = \sqrt{Var(\widehat{\xi}_D) + Var(\widehat{\xi}_U) + 2 \cdot Cov(\widehat{\xi}_D, \widehat{\xi}_U)}$ , sfruttando il fatto che la varianza di una v.c. data dalla somma di altre due v.c. si può ottenere sommando le due varianze note (in questo caso relative a  $\widehat{\xi}_D$  e  $\widehat{\xi}_U$ ), e aggiungendo il doppio del valore della covarianza tra le due variabili casuali.

<sup>72</sup> Conoscendo, oltre al valore stimato del parametro, anche il relativo *standard error*, infatti, è possibile utilizzare lo strumento di inferenza statistica della verifica delle ipotesi. Nei modelli statistici, generalmente, l'ipotesi sottoposta a verifica (che viene detta ipotesi nulla) riguarda il fatto che il parametro di interesse assuma valore pari a 0 (James et al., 2021, p. 67). Lo scopo è quello di individuare per quali valori l'ipotesi in questione vada rifiutata perché, sulla base dei dati osservati, vi è sufficiente evidenza empirica contro tale ipotesi nulla (Cicchitelli, D'Urso, Minozzo, 2017, p. 455). La verifica delle ipotesi si basa sul calcolo di una "statistica test" che, in questo caso, sarà data dal rapporto tra la stima del parametro e il relativo errore standard (James et al., 2021, p. 67): se il valore risultante è superiore – in valore assoluto – al quantile che, nella distribuzione Normale standardizzata, corrisponde al livello di confidenza desiderato, allora si considera che l'ipotesi che esso possa assumere valore 0 sia scarsamente supportata, pertanto essa viene rifiutata. Spesso si controlla che il valore assoluto della statistica test risulti superiore a 2; in questo modo, si rifiuta l'ipotesi nulla che il parametro sia uguale a zero con un elevato livello di confidenza (superiore al 95%).

ritenere affidabili. Anche relativamente al parametro  $\hat{\pi}$  del modello CUM, la variabilità risulta piuttosto contenuta rispetto ai valori stimati; lo stesso vale per i tre parametri di *feeling*, salvo per le scale “Ruvido-Morbido”, “Glaciale-Tropicale”, “Offuscato-Limpido” e “Antico-Nuovo”. Nei primi tre casi, infatti, gli *standard error* di  $\widehat{\xi}_D$  – se confrontati con le stime del parametro (corrispondenti a valori molto bassi, di 0,0218, 0,0442 e 0,0177) – risultano piuttosto rilevanti; la variabilità non è quindi irrisoria, dunque le stime potrebbero non essere del tutto affidabili.<sup>73</sup> Anche la scala “Antico-Nuovo” presenta una situazione analoga, ma relativamente al parametro  $\widehat{\xi}_U$ , che presenta un valore di 0,0337 – addirittura inferiore al relativo errore standard (di 0,0434).

#### 4.3.1. Rappresentazione grafica delle stime dei parametri relative alle 12 scale

Una volta ottenute le stime dei parametri dei modelli CUM e CUB, è possibile rappresentare graficamente le diverse scale a differenziale semantico, così da poterle confrontare in modo immediato sulla base delle componenti di incertezza e di *feeling* che si può ritenere abbiano caratterizzato il processo di risposta a ognuna di esse.<sup>74</sup>

La rappresentazione grafica relativa al modello CUM applicato alle 12 scale a differenziale semantico è costituita dal *ternary plot* riportato in Figura 4.4, nel quale ogni scala corrisponde a un punto, le cui coordinate sono rappresentate dai valori stimati per le tre misure di *feeling* ( $\widehat{\xi}_D$ ,  $\widehat{\xi}_U$  e  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ ), riportate sui tre assi del grafico. La dimensione dei punti, invece, dipende dal valore della misura di incertezza  $1 - \hat{\pi}$ , che dà informazioni sull’indecisione soggettiva che caratterizza il processo di risposta a ognuna delle 12 scale.

La Figura 4.4. rappresenta anche le quattro aree in cui può essere suddiviso il *ternary plot*. Buona parte dei punti si collocano nell’area superiore, nella quale il valore stimato di  $\widehat{\xi}_U$  (espressione del *feeling* verso la parte destra della scala) risulta superiore a 0,5; quindi, dato che la somma delle tre misure di *feeling* è sempre pari a 1, per le scale posizionate in quest’area  $\widehat{\xi}_U$  sarà il parametro che assume il valore più elevato. Questo vale per le scale individuate dalle coppie di aggettivi “Ruvido-Morbido”, “Spigoloso-Tondeggiante”, “Appiccicoso-Fluidido”, “Soffocante-Fresco”, “Fetido-Aromatico”, “Amaro-Dolce”, “Insiapido-Saporito”, “Pallido-Frizzante”, e “Offuscato-Limpido”.

<sup>73</sup> In particolare, il rapporto tra il valore stimato di  $\xi_D$  (o di  $\xi_U$  per la scala “Antico-Nuovo”) e il relativo *standard error* risulta inferiore a 2, il che impedisce di rifiutare l’ipotesi nulla a un elevato livello di significatività.

<sup>74</sup> Se si decide di analizzare i dati attraverso i modelli CUB e CUM, significa che si condivide l’ipotesi – comune ad entrambi – secondo cui la scelta dell’alternativa di risposta di una scala ordinale deriva dalla combinazione di due componenti: una certa indecisione soggettiva nel fornire la risposta e una valutazione attenta e ben ponderata delle proprie convinzioni in merito all’aspetto che viene chiesto di indagare.

Nell'area in basso a sinistra del grafico – nella quale il *feeling* prevalente si orienta verso la parte sinistra della scala – è presente soltanto il punto che rappresenta la scala “Antico-Nuovo”. Anche nell'area in basso a destra, in cui prevale il *feeling* neutrale, è presente un solo punto, corrispondente a “Glaciale-Tropicale”. La scala rimanente, cioè quella rappresentata dagli aggettivi “Speziato-Fruttato”, è collocata nell'area centrale del *ternary plot*, perché essa corrisponde a una situazione meno netta rispetto alle precedenti, nella quale nessuna misura di *feeling* risulta superiore a 0,5.

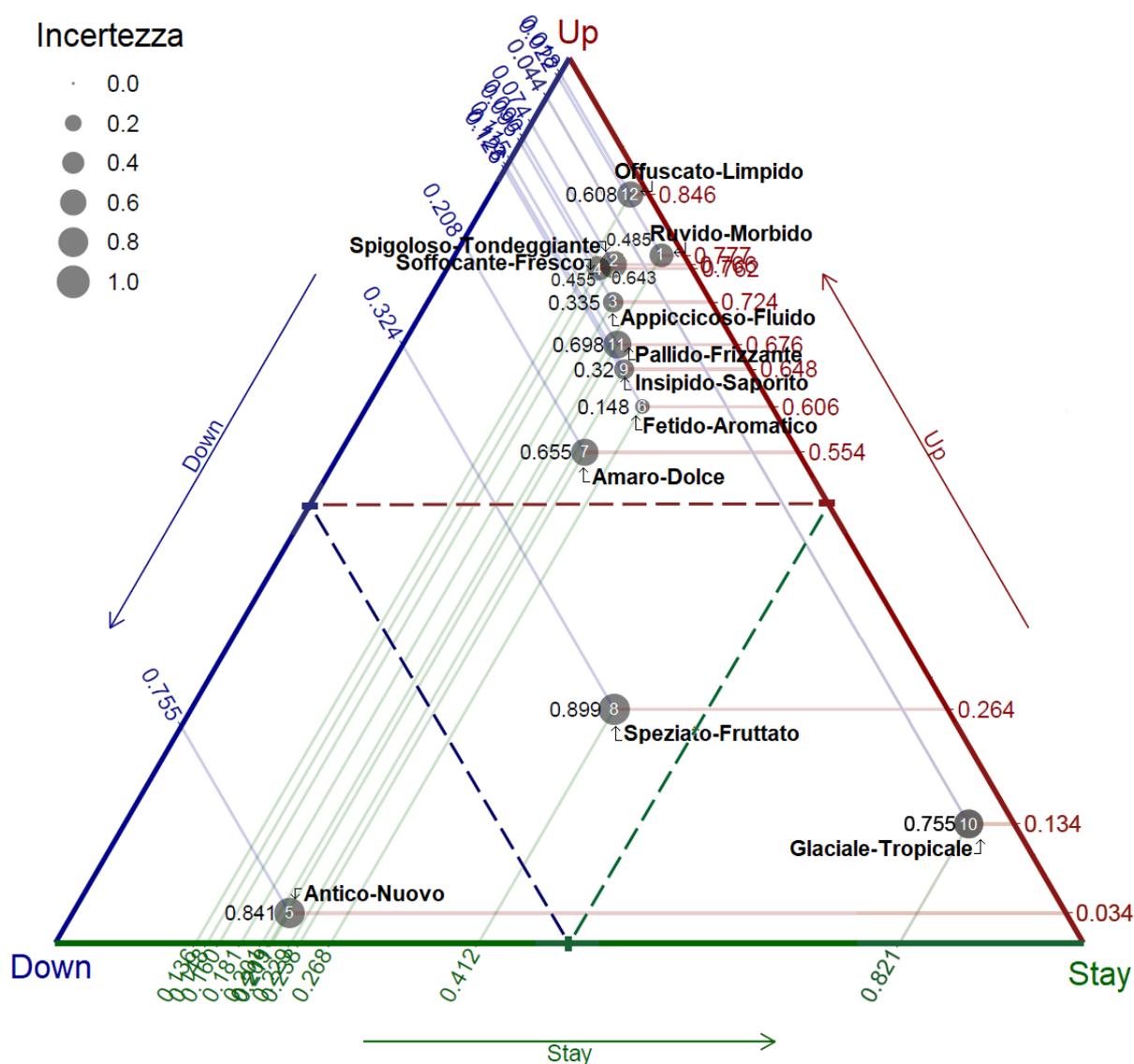


Figura 4.4. – Rappresentazione grafica (su un unico *ternary plot*) delle stime dei parametri del modello CUM per le 12 scale a differenziale semantico.

Fonte: Nostre elaborazioni sul *ternary plot* risultante dall'applicazione del modello CUM.

Complessivamente, quindi, le risposte dei 1024 visitatori intervistati nelle tre sale della Pinacoteca tendono a orientarsi verso l'aggettivo di destra nella maggior parte delle scale a

differenziale semantico. Infatti, le percezioni sensoriali prevalenti risultano associate a qualcosa di “morbido”, “tondeggiante” e “fluida” per quanto riguarda il tatto, “fresco” e “aromatico” per l’olfatto, “dolce” e “saporito” per il gusto, “frizzante” e “limpido” per la vista. Tre sono le scale che fanno eccezione: tra gli aggettivi “antico” e “nuovo” risulta prevalente il primo termine, posto sulla sinistra della scala; tra “glaciale e tropicale” prevale una posizione di neutralità; infine, per la scala individuata dagli aggettivi “speziato” e “fruttato”, il *feeling* prevalente è quello neutrale, anche se le misure di *feeling* verso la parte sinistra ( $\widehat{\xi}_D$ ) e destra ( $\widehat{\xi}_U$ ) della scala risultano soltanto di poco inferiori al valore di  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ .

Può essere utile confrontare le considerazioni appena effettuate in merito al modello CUM con quelle che si otterrebbero se le risposte osservate venissero analizzate tramite il modello CUB, relativamente al quale la Figura 4.5. riporta la rappresentazione grafica delle misure di *feeling* e di incertezza.

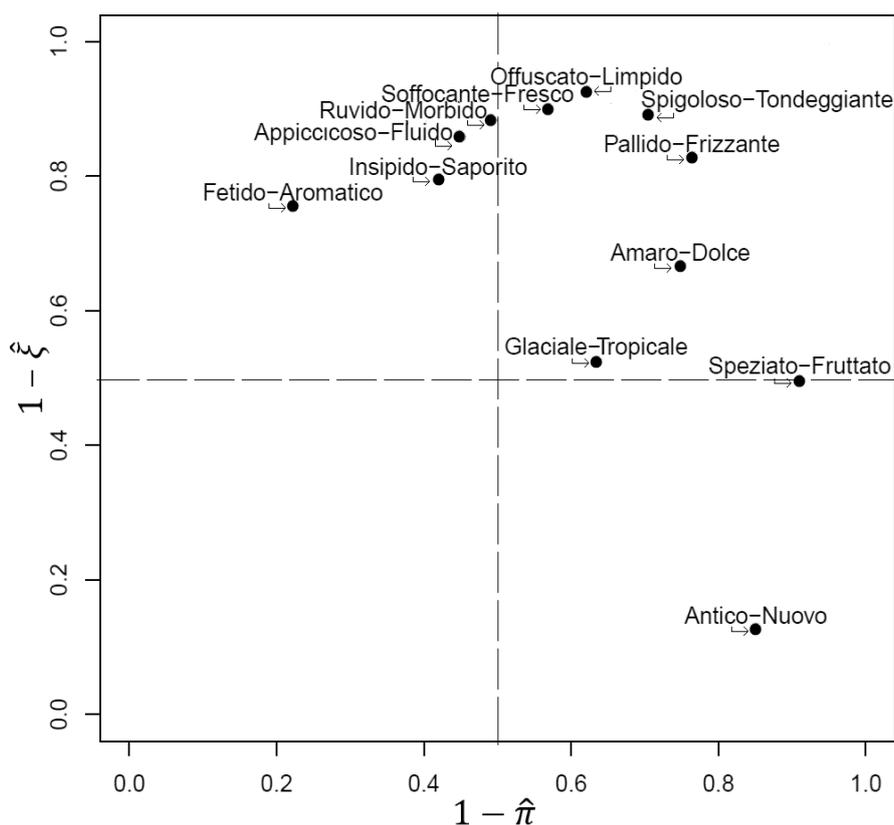


Figura 4.5. – Rappresentazione grafica delle stime dei parametri di incertezza e di *feeling* del modello CUB per le 12 scale a differenziale semantico.

Fonte: Nostre elaborazioni sulla rappresentazione grafica dei parametri del modello CUB.

Nel modello CUB è presente una sola misura del *feeling*, rappresentata dal valore  $1 - \hat{\xi}$ , che esprime la probabilità che una certa alternativa di risposta venga scelta rispetto a un’altra in

quanto quest'ultima non è ritenuta sufficientemente forte per rappresentare la percezione del rispondente. Il valore stimato di  $1 - \hat{\xi}$  sarà alto (e prossimo a 1) quando il *feeling* manifestato è elevato, cioè quando la prevalenza dei rispondenti tende a scegliere le alternative di risposta rappresentate con i numeri più alti che, nel caso delle scale a differenziale semantico, corrispondono alle categorie in prossimità dell'estremo destro della scala. Questo si verifica per le scale individuate dalle coppie di aggettivi “Offuscato-Limpido”, “Soffocante-Fresco”, “Spigoloso-Tondeggiante” e “Ruvido-Morbido”; esse corrispondono esattamente ai quattro punti che occupano la posizione più alta nel *ternary plot* del modello CUM, per i quali la misura del *feeling* verso la parte destra della scala risulta molto elevata. Anche le scale “Pallido-Frizzante”, “Insipido-Saporito” e “Fetido-Aromatico”, stando al modello CUB, presentano un livello di *feeling* piuttosto elevato, infatti si trovano nelle due aree superiori della Figura 4.5; questo trova conferma nella Figura 4.4. relativa al modello CUM, nella quale i punti relativi a queste tre scale si trovano sempre nell'area superiore del grafico, poco al di sotto dei punti che rappresentano le quattro scale più alte.

I punti raffigurati nelle aree inferiori della rappresentazione grafica relativa al modello CUB sono invece caratterizzati da valori contenuti di  $1 - \hat{\xi}$ , il che segnala un basso livello di *feeling* e cioè che la scelta dei rispondenti ricade principalmente sulle alternative di risposta indicate con i numeri più bassi, ossia quelle riferite all'estremo sinistro delle scale a differenziale semantico. Nella Figura 4.5. l'unico punto posizionato in uno dei due quadranti inferiori – caratterizzato quindi da un basso livello di *feeling* – corrisponde alla scala “Antico-Nuovo”, che, infatti, si trova nell'area inferiore sinistra del *ternary plot* relativo al modello CUM, essendo caratterizzata da un elevato valore di  $\hat{\xi}_D$ , che indica un alto livello di *feeling* verso la parte sinistra della scala a differenziale semantico.

I punti che si trovano nella parte centrale della Figura 4.5, caratterizzati da valori stimati del parametro di *feeling*  $1 - \hat{\xi}$  prossimi a 0,5, corrispondono alle scale che, secondo il modello CUB, presentano un livello intermedio di *feeling*. Quando questo modello viene applicato alle scale a differenziale semantico, un tale livello di *feeling* può però corrispondere a due situazioni diverse tra loro, che il modello CUM consente di distinguere in modo chiaro – a differenza di quanto avviene nel caso del CUB. Quest'ultimo modello, infatti, si basa su un'unica misura di *feeling*, rappresentata da  $1 - \hat{\xi}$ , mentre nel modello CUM si ottengono tre misure ( $\hat{\xi}_D$ ,  $\hat{\xi}_U$  e  $1 - \hat{\xi}_D - \hat{\xi}_U$ ),

che esprimono, rispettivamente, il *feeling* verso la parte sinistra della scala, verso la sua parte destra o verso l'alternativa di risposta centrale (che indica un atteggiamento di tipo neutrale). Per questo motivo, il modello CUM consente di distinguere i casi in cui i rispondenti manifestano un *feeling* fortemente neutrale – quando le risposte ricadono prevalentemente sulla categoria centrale della scala – da quelli che presentano un *feeling* moderato sia verso la parte destra della scala, sia verso quella sinistra – e, di conseguenza, anche verso l'alternativa di risposta centrale. Le scale a differenziale semantico caratterizzate da un forte atteggiamento di neutralità corrisponderanno, nella rappresentazione grafica relativa al modello CUM, ai punti posizionati nell'area inferiore destra, come avviene per la scala “Glaciale-Tropicale” in Figura 4.4, per la quale il valore stimato di  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$  risulta molto elevato (essendo pari a 0,8215). Invece, i casi in cui tutte le tre misure di *feeling* risultano moderate corrisponderanno ai punti collocati nell'area centrale del *ternary plot*, come accade per la scala “Speziato-Fruttato”, per la quale la misura di *feeling*  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$  risulta comunque la più elevata (attestandosi su un valore di 0,4117), essendo però di poco superiore ai valori di  $\widehat{\xi}_D$  (pari a 0,3244) e di  $\widehat{\xi}_U$  (che risulta 0,2639). Dall'applicazione del modello CUM risulta quindi chiaro che i rispondenti presentano un *feeling* differente nelle due scale a differenziale semantico. Impiegando il modello CUB, invece, le due scale sembrerebbero del tutto simili per quanto riguarda la componente di *feeling*, come si nota anche dalla Figura 4.5, nella quale i due punti che le rappresentano sono caratterizzati da valori molto simili di  $1 - \hat{\xi}$  (che è pari a 0,5213 per la scala “Glaciale-Tropicale” e a 0,4931 per la scala “Speziato-Fruttato”). Relativamente alla componente di incertezza, essa è misurata da un solo parametro sia nel caso del modello CUM, sia nel modello CUB. Nel primo caso, il livello di incertezza è rappresentato graficamente dalla dimensione dei punti presenti nel *ternary plot*. Nel secondo caso, invece, l'incertezza corrisponde all'ascissa dei punti presenti nella rappresentazione grafica del modello CUB: più i punti si trovano a destra e più l'incertezza sarà elevata, mentre l'incertezza sarà minore per le scale corrispondenti ai punti collocati più a sinistra nel grafico.

Tra le 12 scale analizzate, quella individuata dagli aggettivi “Fetido-Aromatico” presenta l'incertezza minore, che si attesta su un livello basso nel caso di entrambi i modelli. Nella rappresentazione grafica del modello CUB, infatti, essa corrisponde al punto che si trova più a sinistra (con un valore dell'ascissa, e cioè di  $1 - \hat{\pi}$ , pari a 0,2221) ; nel *ternary plot* relativo al

CUM, tale scala è rappresentata dal punto di dimensione minore (dovuta al valore di  $1 - \hat{\pi}$  che risulta pari a 0,1484).

Le scale che presentano un'incertezza elevata sono invece quelle individuate dagli aggettivi “Speziato-Fruttato” e “Antico-Nuovo”: nella rappresentazione relativa al modello CUB esse corrispondono ai due punti più a destra (con dei valori di  $1 - \hat{\pi}$  pari a 0,9103 e 0,8507) e nel *ternary plot* relativo al modello CUM i punti a esse associati sono quelli caratterizzati dalla dimensione più elevata (dovuta ai valori di  $1 - \hat{\pi}$  pari a 0,8989 e 0,8407). Un livello medio-alto di incertezza caratterizza le scale “Offuscato-Limpido”, “Spigoloso-Tondeggiante”, “Amaro-Dolce”, “Pallido-Frizzante” e “Glaciale-Tropicale”<sup>75</sup>, che presentano, in entrambi i modelli, dei valori stimati di  $1 - \hat{\pi}$  compresi tra 0,6 e 0,8, come si può osservare dalla Figura 4.5. relativa al modello CUB – e come mostra la dimensione dei relativi punti rappresentati in Figura 4.4.

Le scale “Soffocante-Fresco” e “Ruvido-Morbido” presentano un livello medio di incertezza, che si attesta attorno al valore di 0,5 per entrambi i modelli; anche la misura dell'incertezza delle scale “Insidio-Saporito” e “Appiccicoso-Fluidico” si attesta su valori simili, almeno nel caso del modello CUB. Applicando il modello CUM, invece, per queste ultime due scale l'incertezza risulta medio-bassa, attestandosi su valori di  $1 - \hat{\pi}$  vicini a 0,3.

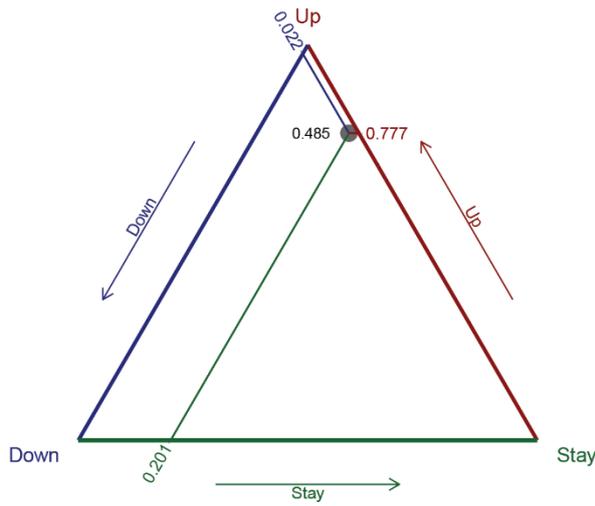
#### **4.3.2. Rappresentazione dei risultati ottenuti per le singole scale a differenziale semantico**

Il *ternary plot* rappresentato in Figura 4.4. consente di osservare congiuntamente i risultati ottenuti applicando il modello CUM alle risposte relative alle 12 scale a differenziale semantico sulle quali si basa l'indagine sensoriale svolta presso la Pinacoteca Tosio-Martinengo. Tuttavia, trattandosi di un numero elevato di punti da rappresentare su un unico grafico, può essere utile utilizzare un *ternary plot* diverso per ogni scala a differenziale semantico (come riportato in Figura 4.6.), in modo che, oltre a vedere la posizione e la dimensione del punto associato a quella scala, sia possibile leggere i valori delle tre misure di *feeling* ( $\widehat{\xi}_D$ ,  $\widehat{\xi}_U$  e  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ , che costituiscono le coordinate del punto) e la misura di incertezza  $1 - \hat{\pi}$  (che determina la dimensione del punto). In questo modo risulta più semplice interpretare i risultati del modello CUM, sulla base dei quali è possibile ottenere una sintesi delle percezioni sensoriali manifestate dai 1024 visitatori intervistati.

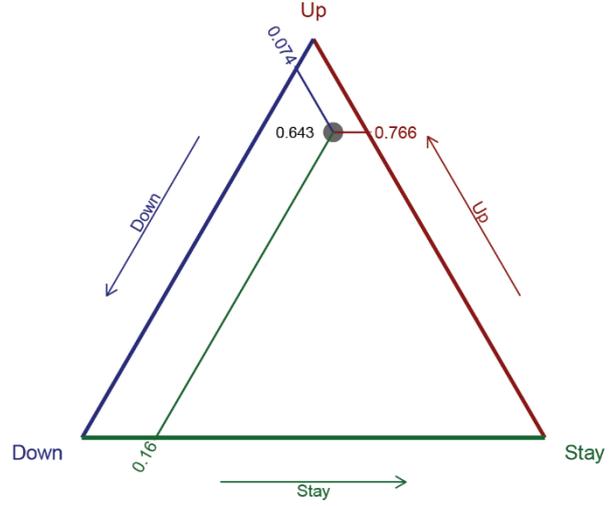
---

<sup>75</sup> Per la maggior parte delle scale a differenziale semantico il valore di  $1 - \hat{\pi}$  nel caso del modello CUM risulta leggermente più contenuto di quello che si otterrebbe applicando il modello CUB. Questo non vale nel caso della scala “Glaciale-Tropicale”, per la quale la stima del parametro di incertezza assume un valore di 0,63 nel caso del CUB e di 0,76 nel caso del modello CUM.

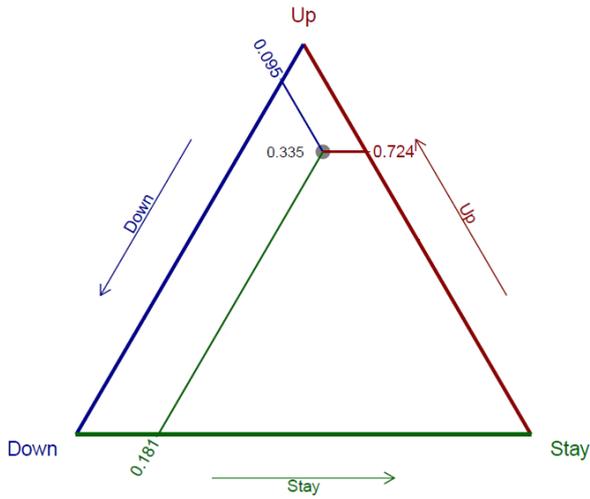
Ruvido – Morbido



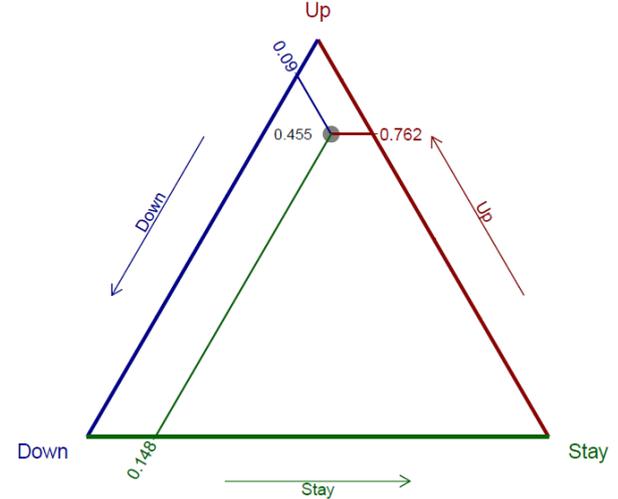
Spigoloso – Tondeggiante



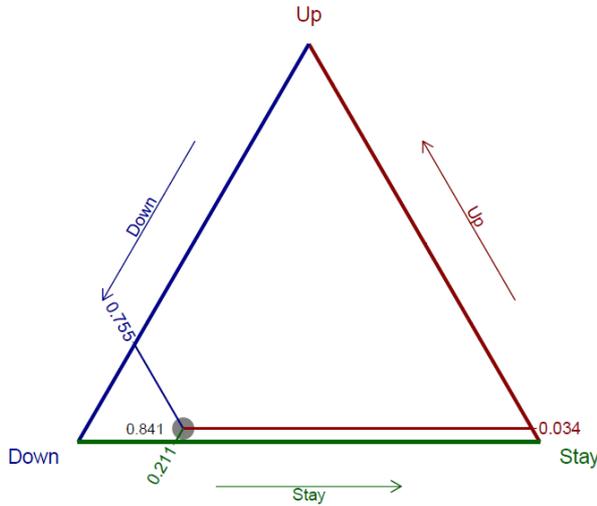
Appiccicoso – Fluido



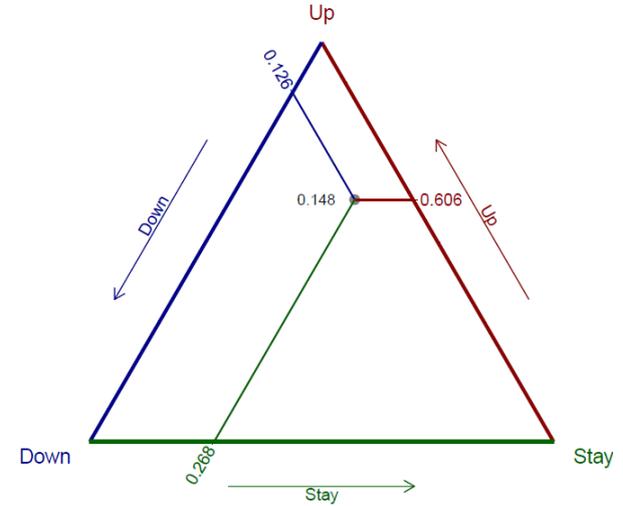
Soffocante – Fresco



Antico – Nuovo



Fetido – Aromatico



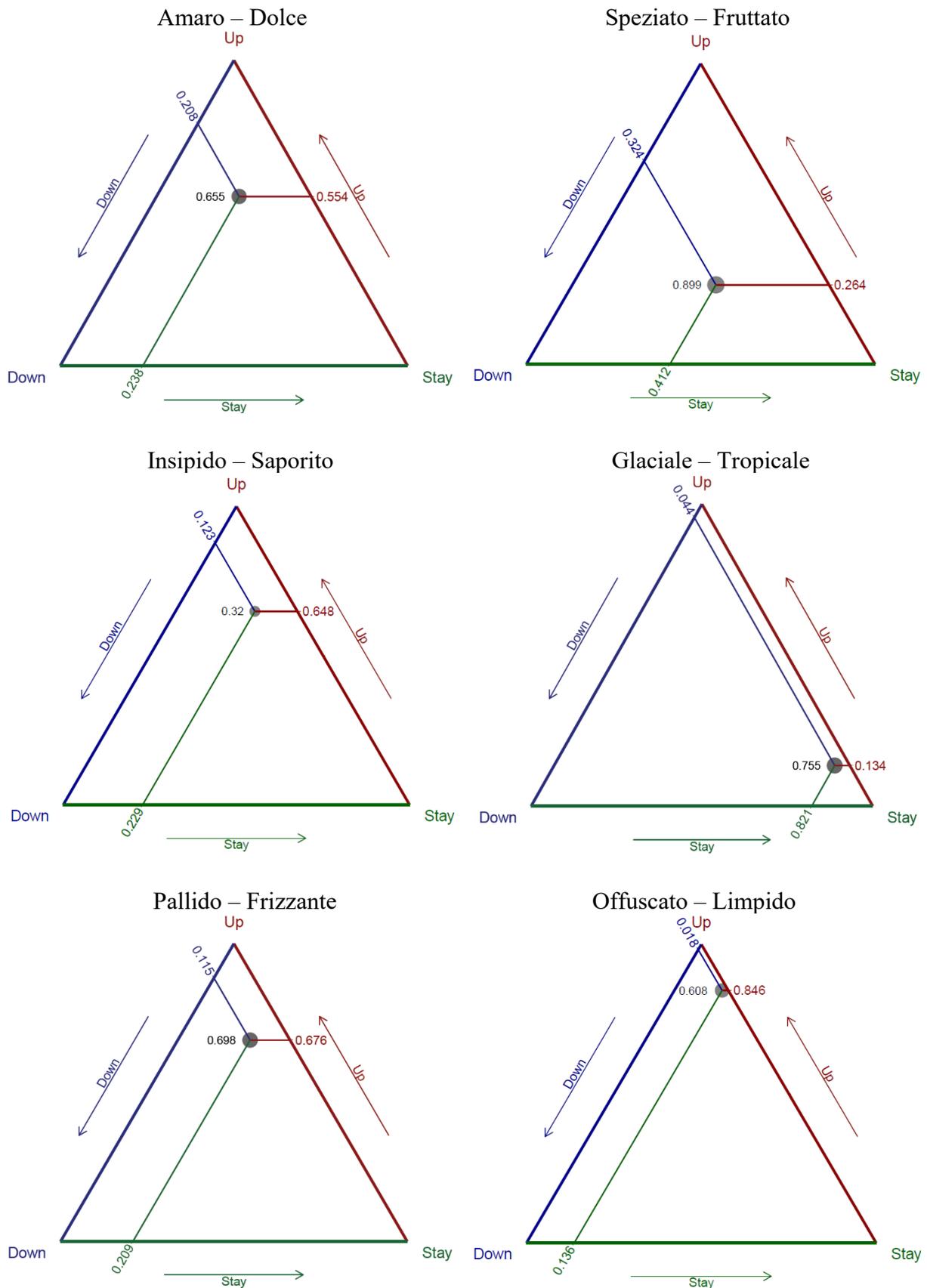


Figura 4.6. – Rappresentazione grafica dei singoli *ternary plot* relativi a ognuna delle 12 scale a differenziale semantico analizzate applicando il modello CUM.  
 Fonte: Nostre elaborazioni, applicando il modello CUM alle risposte dei 1024 visitatori della Pinacoteca.

La Figura 4.6. fa riferimento alle percezioni manifestate dai 1024 visitatori della Pinacoteca ai quali è stato sottoposto il questionario mentre si trovavano in una delle tre sale oggetto dell'indagine sensoriale. Le informazioni in merito alle componenti di *feeling* e di incertezza del processo decisionale, che si possono ottenere applicando il modello CUM alle risposte osservate, si riferiscono quindi a una “percezione media” di tutti i rispondenti intervistati nella sala azzurra, nella sala rossa e in quella verde.<sup>76</sup> Pertanto, le sensazioni tattili, olfattive, gustative e visive dichiarate dai visitatori rappresentano le risposte sinestesiche che, mediamente, si generano nei visitatori a seguito della vista dei diversi elementi presenti nelle sale della Pinacoteca. Queste “percezioni medie” potranno essere utilizzate come termine di paragone dei risultati (presentati nei Paragrafi successivi) ottenuti applicando il modello CUM alle sole risposte raccolte in una delle tre sale oggetto dell'indagine sensoriale.

Relativamente alle percezioni tattili, i 1024 rispondenti tendono ad associare alla visita della Pinacoteca una sensazione riferita prevalentemente a qualcosa di “morbido”, “tondeggiante” e “fluida”. La stima del *feeling* verso la parte destra della scala ( $\widehat{\xi}_U$ ), infatti, risulta elevata – e superiore al valore di 0,7 – per tutte le tre scale a differenziale semantico che riguardano il tatto, mentre la misura del *feeling* verso la parte sinistra risulta molto contenuta (in quanto  $\widehat{\xi}_U$  è sempre inferiore a 0,1), così come la misura del *feeling* neutrale ( $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ , che raggiunge al massimo il valore di 0,2). Questo significa che i 1024 visitatori manifestano una convinzione piuttosto forte secondo cui la percezione che si ha durante la visita della sala è meglio descritta dal termine posizionato sul polo destro della scala a differenziale semantico (in corrispondenza del quale, infatti, si trovano gli aggettivi “morbido”, “tondeggiante” e “fluida”).

Oltre alle informazioni che il modello CUM fornisce in merito alla componente di *feeling* del processo decisionale, è utile considerare anche quelle relative all'incertezza soggettiva, fornite dal valore stimato di  $1 - \widehat{\pi}$ .<sup>77</sup> La scala “Appiccicoso-Fluida” presenta un livello medio-basso di incertezza (in quanto  $1 - \widehat{\pi}$  è pari a 0,335), che indica una certa concordia dei rispondenti nello scegliere le ultime categorie della scala. L'incertezza risulta media nel caso di “Ruvido-

<sup>76</sup> Nell'Appendice 1 viene presentato che dall'analisi di tutte le 1024 risposte emergono delle percezioni sensoriali che, nella maggior parte dei casi, risultano intermedie a quelle che prevalgono in ognuna delle tre sale.

<sup>77</sup> Il valore di  $1 - \widehat{\pi}$  può essere considerato sia come la misura (media) dell'indecisione di ogni singolo soggetto nella scelta dell'alternativa di risposta, sia come espressione della quota di rispondenti che risultano totalmente incerti (che risponderanno cioè in modo casuale). Di conseguenza, un valore elevato di  $1 - \widehat{\pi}$  indica che i rispondenti risultano poco concordi nello scegliere le stesse alternative di risposta, in quanto un'incertezza elevata porterà buona parte dei rispondenti a scegliere in modo casuale, facendo distribuire le risposte tra tutte le alternative disponibili.

Morbido” (in quanto  $1 - \hat{\pi} = 0,485$ ) e medio-alta per la scala “Spigoloso-Tondeggiante” (dato che  $1 - \hat{\pi} = 0,643$ ); in questo caso, sebbene il *feeling* prevalente orienti le risposte verso la parte destra della scala, alcune risposte – per effetto dell’incertezza e quindi di una scelta casuale – ricadranno anche sulle prime categorie della scala a differenziale semantico.

Relativamente alle percezioni olfattive, il *feeling* dei visitatori risulta diverso nelle tre scale a differenziale semantico impiegate. Nella scala individuata dalla coppia di aggettivi “Soffocante-Fresco” la situazione è molto simile al caso delle tre scale relative alle percezioni tattili: il *feeling* prevalente tende a orientare le risposte verso il polo destro della scala (con un valore di  $\widehat{\xi}_U = 0,762$ ) e l’incertezza si attesta su un livello medio (infatti  $1 - \hat{\pi}$  risulta pari a 0,455). Anche nel caso di “Fetido-Aromatico”, la misura di *feeling* più elevata è quella associata alla parte destra della scala, anche se essa assume un valore leggermente inferiore (intorno a 0,6). In questo caso, però, l’incertezza risulta davvero molto contenuta, in quanto  $1 - \hat{\pi}$  risulta pari a 0,148, che rappresenta il valore più contenuto riscontrato nelle 12 scale a differenziale semantico oggetto di analisi. Un livello di incertezza così basso indica che solo una piccola parte dei visitatori ha scelto in modo casuale l’alternativa di risposta; questo spiegherebbe perché alcune risposte sono ricadute sulle prime categorie, pur in presenza di un basso *feeling* verso la parte sinistra della scala. Gran parte dei visitatori, però, ha scelto secondo una valutazione ben ponderata del proprio *feeling* – sulla base del quale sono le alternative poste nella parte destra a descrivere meglio la percezione che la visita della sala ha suscitato in loro.

Un *feeling* diverso si osserva nel caso della scala “Antico-Nuovo”, per la quale la tendenza prevalente dei visitatori è quella di scegliere le categorie in prossimità del polo sinistro della scala, in quanto  $\widehat{\xi}_D = 0,755$ . Quindi, diversi visitatori sono convinti che la percezione olfattiva associata alla visita della sala della Pinacoteca possa essere adeguatamente descritta dal termine “antico”; questo sembra coerente con il fatto che le opere esposte risalgono al Cinquecento. In questo caso, tuttavia, il livello di incertezza è elevato (dato che  $1 - \hat{\pi} = 0,841$ ), infatti le risposte a questa scala a differenziale semantico tendono a distribuirsi tra tutte le categorie. È possibile ipotizzare che parte di questa incertezza soggettiva dei rispondenti derivi dal fatto che viene loro chiesto di esprimere la percezione olfattiva che associano alla visita di una sala caratterizzata da una struttura moderna – anche per via delle pareti rivestite di tessuti colorati a

seguito dei lavori di ristrutturazione – nella quale vengono esposte opere antiche. Nel complesso, la visita della Pinacoteca tende a suscitare nei rispondenti delle risposte olfattive legate a qualcosa di “aromatico”, “fresco” ma al contempo “antico”.

Passando alle percezioni legate al gusto, anche le tre scale a esso relative presentano risultati eterogenei per quanto riguarda la componente di incertezza del processo decisionale. Si passa, infatti, da un livello di incertezza piuttosto contenuto, per la scala individuata dagli aggettivi “Insipido-Saporito” (caratterizzata da un valore di  $1 - \hat{\pi} = 0,32$ ), a un’incertezza medio-alta per la scala “Amaro-Dolce” (per la quale  $1 - \hat{\pi} = 0,655$ ), fino ad arrivare a un’incertezza molto elevata nel caso di “Speziato-Fruttato”. Quest’ultima è la scala a differenziale semantico che, tra le 12 analizzate, presenta il maggiore livello di incertezza soggettiva, con un valore stimato del parametro  $1 - \hat{\pi}$  pari a 0,889; la distribuzione di frequenze delle risposte a questa scala, infatti, risulta quella dalla forma più piatta, il che riflette una scelta quasi casuale, che fa distribuire le risposte tra tutte le alternative della scala. Questa elevata incertezza può derivare dal fatto che la scala “Speziato-Fruttato” è una delle poche in cui non è possibile associare a uno dei due aggettivi (solitamente quello posto sull’estremo sinistro della scala) una connotazione in un certo senso negativa, come, ad esempio, avviene nel caso di “fetido”, “insipido”, “amaro”, “soffocante”, e così via. In questo caso, invece, “speziato” e “fruttato” sono due termini che caratterizzano due percezioni gustative diverse tra loro, tra le quali, però, non è possibile individuarne una caratterizzata più da un’accezione negativa e una più da una connotazione positiva.

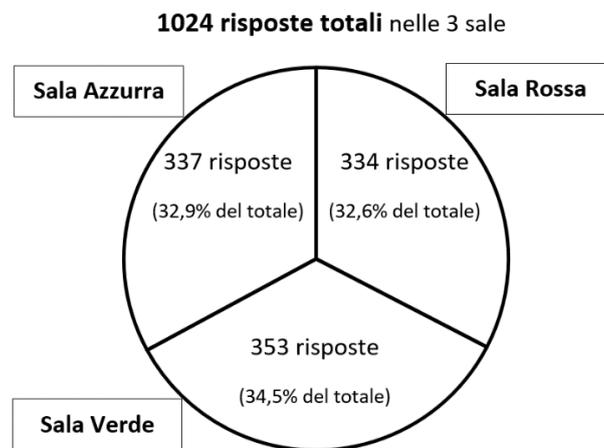
Relativamente alla componente di *feeling*, invece, la scala “Speziato-Fruttato” è caratterizzata dalla situazione meno netta; infatti, come anticipato in precedenza, seppur la percezione prevalente sia quella di neutralità tra i due termini “speziato” e “fruttato”, il *feeling* verso la parte sinistra e destra della scala risulta solo di poco inferiore rispetto a quello neutrale (in quanto  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U = 0,412$ , che supera di poco il valore di  $\widehat{\xi}_D = 0,324$ , che a sua volta è leggermente più alto di  $\widehat{\xi}_U = 0,264$ ). Le scale “Amaro-Dolce” e “Insipido-Saporito”, invece, sono entrambe caratterizzate da una prevalenza del *feeling* verso la parte destra della scala, più marcato nel caso della seconda scala (caratterizzata da un valore di  $\widehat{\xi}_U = 0,648$ , rispetto a  $\widehat{\xi}_U = 0,554$  nel caso della prima scala a differenziale semantico). I visitatori, quindi, associano alla visita della Pinacoteca delle percezioni gustative legate prevalentemente a qualcosa di “saporito”, “dolce” e né “speziato” né “fruttato”.

Infine, riguardo alle percezioni legate alla vista, le tre scale a differenziale semantico impiegate presentano tutte un livello medio-alto di incertezza, segnalata dai valori stimati del parametro  $1 - \hat{\pi}$  superiori a 0,6. La scala individuata dagli aggettivi “Pallido-Frizzante” è caratterizzata da un elevato livello di *feeling* verso la parte destra della scala, così come avviene nel caso di “Offuscato-Limpido”. Quest’ultima scala è caratterizzata da un valore molto elevato di  $\widehat{\xi}_U$  (pari a 0,846), che costituisce il valore in assoluto più elevato le tre misure di *feeling* ( $\widehat{\xi}_D$ ,  $\widehat{\xi}_U$  e  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ ) delle 12 scale a differenziale semantico. Pertanto, molti visitatori saranno fortemente convinti che il termine “limpido” descriva adeguatamente la percezione visiva che associano alla visita della sala della Pinacoteca. Questo si traduce in una netta prevalenza di risposte in corrispondenza delle ultime categorie della scala, ossia quelle in prossimità dell’estremo destro. Anche nel caso della scala “Glaciale-Tropicale” una misura di *feeling* risulta molto elevata: si tratta di  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ , che, con il suo valore di 0,821, denota una marcata tendenza dei rispondenti a definirsi neutrali rispetto ai due aggettivi posizionati agli estremi della scala a differenziale semantico, portando molti a scegliere la categoria centrale della scala. In questo caso, quindi, la convinzione prevalente è che né il termine posizionato all’estremo destro della scala né quello sul polo sinistro descrivono adeguatamente la percezione suscitata dalla visita della sala. La vista delle opere e degli altri elementi che caratterizzano le sale della Pinacoteca suscita quindi delle percezioni – sempre riguardanti la vista, ma relative ad aspetti diversi da quelli a cui i visitatori vengono esposti durante la visita delle sale – che risultano associate prevalentemente a qualcosa di “limpido”, “frizzante” e che non si definirebbe né “glaciale” né “tropicale”.

Le considerazioni presentate finora in merito alle percezioni sensoriali dei visitatori rappresentano una sintesi complessiva delle 1024 risposte al questionario di analisi sensoriale raccolte nelle tre sale della Pinacoteca. Siccome ognuna delle tre stanze si distingue – oltre che per il tema delle opere esposte – anche per il colore del velluto con il quale sono rivestite le pareti, potrebbe essere interessante applicare il modello CUM separatamente alle sole risposte raccolte nella sala azzurra, in quella rossa e in quella verde. In questo modo, confrontando percezioni sensoriali manifestate dai visitatori delle diverse sale, sarà possibile capire se esse cambino sensibilmente da una sala all’altra e, in caso affermativo, se questo avvenga per alcuni aspetti sensoriali specifici – e cioè solo per alcune scale a differenziale semantico – o in modo generalizzato.

Le misure di *feeling* e di incertezza ottenute analizzando tutte le 1024 risposte potranno essere utilizzate come primo termine di confronto dei risultati ottenuti nella singola sala. Una volta analizzati i risultati del modello CUM per tutte le tre sale, sarà possibile metterli a confronto tra loro, per capire se il colore delle pareti possa modificare in modo rilevante alcune delle percezioni sensoriali oggetto di indagine.

La Figura 4.7. mostra il numero di risposte raccolte nella sala azzurra (la Sala III – intitolata “Il primo Cinquecento nella collezione di Paolo Tosio”), in quella rossa (la Sala VI – dedicata a “Moretto, Savoldo e Lotto”) e in quella verde (la sala X – che riguarda “Il Ritratto”).



*Figura 4.7.* – Numero di risposte raccolte nelle tre sale della Pinacoteca Tosio-Martinengo.  
*Fonte:* Nostre elaborazioni sulle risposte al questionario di analisi sensoriale svolto presso la Pinacoteca.

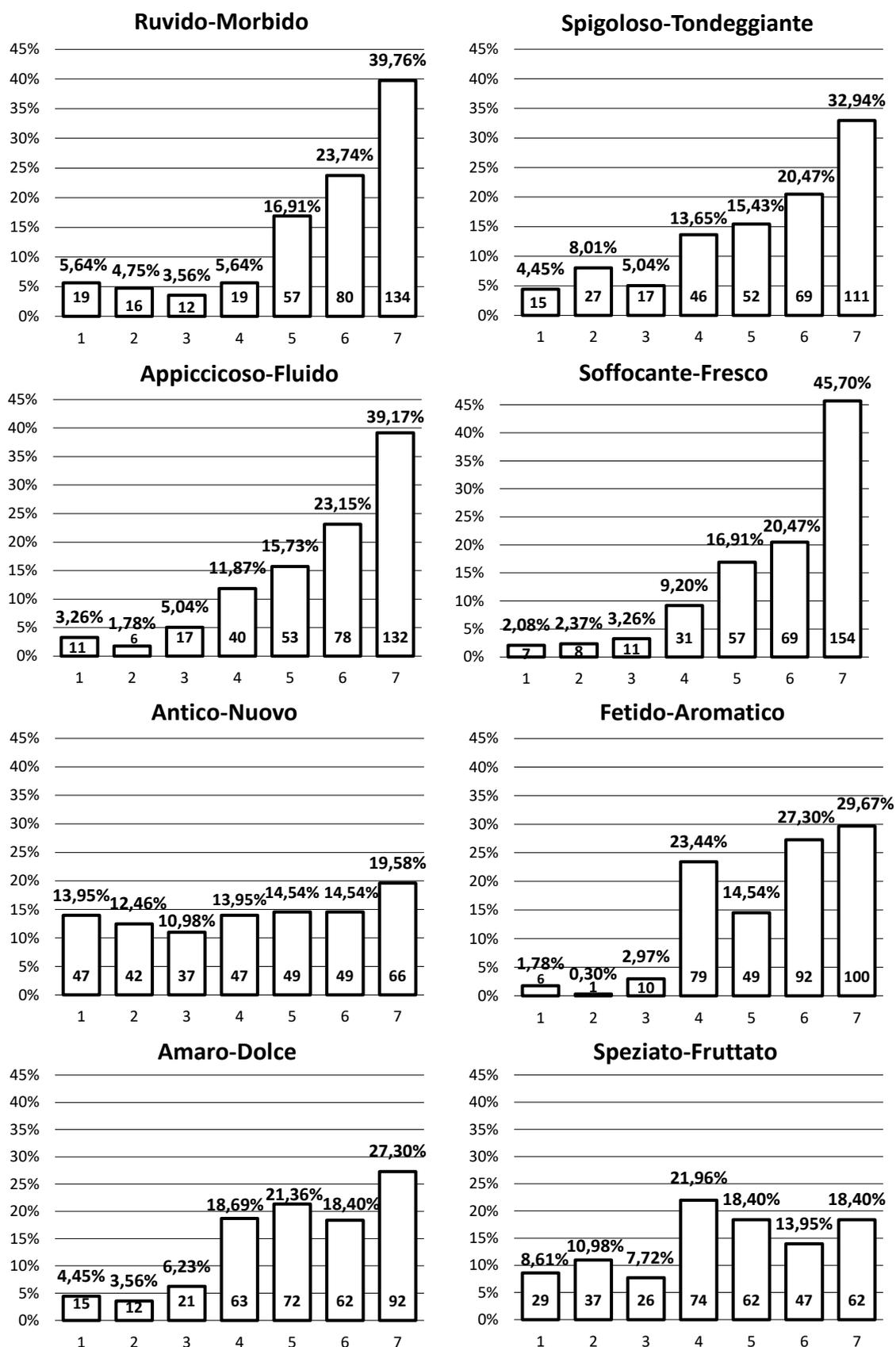
Si può notare che la quantità di visitatori che sono stati intervistati in ognuna delle tre sale della Pinacoteca risulta piuttosto simile; si tratta di un numero considerevole di persone, in quanto in ogni sala sono state raccolte oltre 330 risposte.

#### **4.4. Applicazione del modello CUM alle risposte raccolte nella sala azzurra**

La sala numero III della Pinacoteca Tosio-Martinengo, contenente le opere a tema sacro risalenti al primo Cinquecento e appartenenti alla collezione del Conte Paolo Tosio, è caratterizzata dal colore azzurro del velluto che ne ricopre le pareti.

In questa sala, il questionario di analisi sensoriale è stato sottoposto a 337 visitatori, che rappresentano il 32,9% dei 1024 rispondenti totali intervistati nelle tre sale della Pinacoteca. Il visitatore per il quale si rileva un *missing data* non si trovava nella sala azzurra, perciò, tutte le 337 risposte sono valide e ricadono su una delle 7 alternative di risposta delle 12 scale a differenziale semantico.

Nella Figura 4.8. sono rappresentate, per le 12 scale oggetto d'indagine, le distribuzioni di frequenze assolute e relative delle risposte raccolte nella sala azzurra.



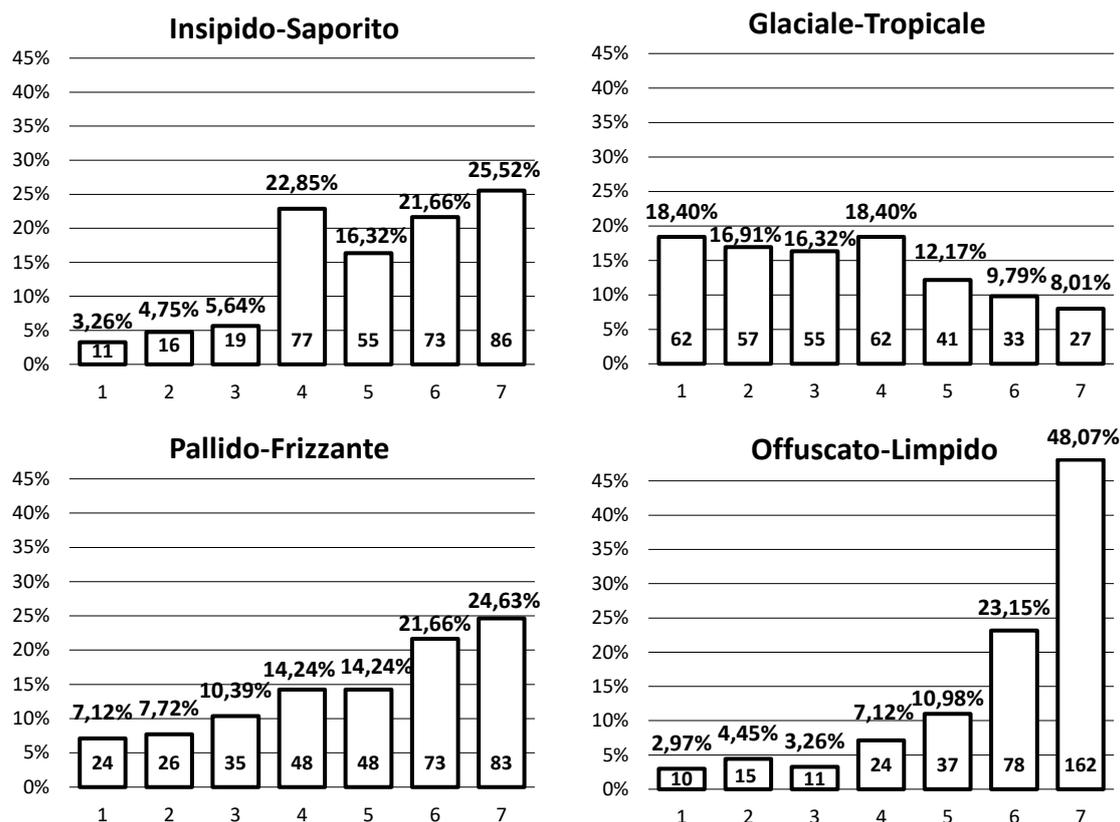


Figura 4.8. – Distribuzione di frequenze relative (in percentuale) e assolute (nella parte bassa di ogni grafico) delle risposte raccolte nella sala azzurra della Pinacoteca.

Fonte: Nostre elaborazioni sulle risposte al questionario di analisi sensoriale svolto presso la Pinacoteca.

Confrontando le distribuzioni di frequenze delle risposte raccolte nella sala azzurra (presentate in Figura 4.8.) con quelle riportate in Figura 4.2, relative a tutte le 1024 risposte al questionario di analisi sensoriale raccolte nelle tre sale, si possono notare alcune differenze significative. Nel caso delle scale “Antico-Nuovo” e “Glaciale-Tropicale”, nella sala azzurra si nota una maggiore tendenza delle risposte a distribuirsi tra tutte le categorie delle scale; inoltre, per la prima scala le frequenze più elevate, anziché trovarsi nella parte sinistra della scala, sono collocate in quella destra, mentre per la seconda scala, anziché riscontrarsi un elevato numero di risposte in corrispondenza della categoria centrale, prevalgono le risposte collocate nella parte di sinistra. Delle differenze leggermente meno marcate si riscontrano anche per le scale “Speziato-Fruttato” e “Amaro-Dolce” che, nella sala azzurra, sono caratterizzate da una forma meno piatta delle distribuzioni di frequenze, perché le categorie poste nella parte destra di tali scale tendono a essere scelte con maggiore frequenza rispetto alle altre.

Per le restanti scale, l’andamento delle distribuzioni di frequenze nella sala azzurra risulta molto simile al caso delle 1024 risposte. Tuttavia, si riscontra che le categorie che in quest’ultimo caso

già si presentavano con la maggiore frequenza, nel caso della sala azzurra risultano ancora più frequenti; nella Figura 4.8, infatti, è stato necessario aumentare il valore massimo dell'asse delle ordinate, perché quello impiegato per la Figura 4.2. risultava insufficiente. Allo stesso tempo, quindi, le alternative di risposta che risultano meno frequenti nel caso dei 1024 rispondenti, nella sala azzurra presentano una frequenza ancora più contenuta. Questo suggerisce che, in questa sala, la componente di incertezza risulterà inferiore a quella emersa dall'analisi di tutte le 1024 risposte. Le categorie che si presentano con la maggiore frequenza, infatti, sono espressione del *feeling* che prevale tra i visitatori; le alternative di risposta meno scelte, invece, corrispondono alle risposte frutto di una decisione pressoché casuale, derivante dall'incertezza. Se queste ultime modalità di risposta risultano meno frequenti nella sala azzurra, significherà che più persone sono riuscite a rispondere sulla base di una valutazione attenta e ponderata del proprio *feeling* verso l'aspetto indagato e, perciò, la componente di incertezza soggettiva risulterà meno rilevante.

#### 4.4.1. Adattamento del modello CUM ai dati raccolti nella sala azzurra

La Tabella 4.3. riporta i valori dell'indice di dissimilarità relativo alle risposte alle 12 scale a differenziale semantico raccolte nella sala azzurra; sono riportati anche i valori che si otterrebbero, per tale indice, qualora ai dati si applicasse – anziché il CUM – il modello CUB.

Tabella 4.3. – Livello di adattamento dei modelli CUM e CUB nella sala azzurra.

Fonte: Nostre elaborazioni, applicando il modello CUM alle risposte osservate.

Scala a differenziale semantico	Modello CUM			Modello CUB		
	<i>Diss</i>	AIC	BIC	<i>Diss</i>	AIC	BIC
Ruvido-Morbido	0,0353	1087	1098	0,0771	1091	1099
Spigoloso-Tondeggiante	0,0691	1192	1204	0,1050	1201	1208
Appiccicoso-Fluidico	0,0607	1084	1095	0,1191	1102	1110
Soffocante-Fresco	0,0396	1011	1022	0,1433	1039	1047
Antico-Nuovo	0,0229	1309	1321	0,0310	<u>1308</u>	<u>1316</u>
Fetido-Aromatico	<u>0,1571</u>	1094	1106	0,2154	1115	1122
Amaro-Dolce	0,0908	1193	1205	0,1509	1217	1224
Speziato-Frustrato	<u>0,1033</u>	1295	1306	0,1169	1297	<u>1304</u>
Insidido-Saporito	<u>0,1282</u>	1204	1216	0,1787	1221	1229
Glaciale-tropicale	0,0533	1296	1307,4	0,0822	1299	<u>1307,0</u>
Pallido-Frizzante	0,0476	1259,8	1271	0,0579	1260,5	<u>1268</u>
Offuscato-Limpido	0,0264	1004	1016	0,0569	1007	<u>1015</u>

Per tutte le 12 scale a differenziale semantico, grazie alla maggiore flessibilità del modello CUM, il suo livello di adattamento risulta superiore a quello che si otterrebbe con il CUB; in alcuni casi, il miglioramento nella bontà della rappresentazione ottenuta grazie al modello CUM risulta molto significativo. Per la scala “Soffocante-Fresco”, per esempio, l’indice di dissimilarità nel caso del CUB supererebbe il valore di 0,14, mentre applicando il CUM si ottiene un valore inferiore a 0,04. Anche per le scale “Appiccicoso-Fluidico” e “Insipido-Saporito”, il valore dell’indice di dissimilarità nel caso del CUB sarebbe, rispettivamente, di 0,18 e 0,12, mentre utilizzando il modello CUM esso diventa pari a 0,128 e 0,06.

Nella maggior parte dei casi, l’indice di dissimilarità del modello CUM assume un valore inferiore a 0,10: questo indica che la quota di risposte che dovrebbero essere cambiate per ottenere un adattamento perfetto risulta piuttosto contenuta, perciò il modello CUM si adatta in modo soddisfacente ai dati. La scala “Speziato-Fruttato” è caratterizzata da un indice di dissimilarità leggermente superiore (di 0,1033), mentre per “Insipido-Saporito” e “Fetido-Aromatico” l’indice risulta pari a 0,1282 e 0,1571, rispettivamente. Questo si deve al fatto che, per le scale in questione, la distribuzione di frequenze è bimodale e, in particolare, è caratterizzata da due frequenze molto elevate in corrispondenza della categoria centrale della scala e di un’alternativa prossima all’estremo di destra.

Solitamente, il modello CUM – grazie alla presenza dei due parametri di *feeling* – consente di rappresentare bene anche le distribuzioni bimodali per le quali le due alternative di risposta più frequenti sono posizionate una nella parte destra della scala e una in quella sinistra; in questi casi, perciò, la modalità centrale presenterà una frequenza inferiore. L’elevata frequenza della categoria posta nella parte sinistra riuscirà a essere rappresentata grazie a valori elevati di  $\widehat{\xi}_D$ , mentre quella della categoria nella parte destra verrà rappresentata da alti valori di  $\widehat{\xi}_U$ .

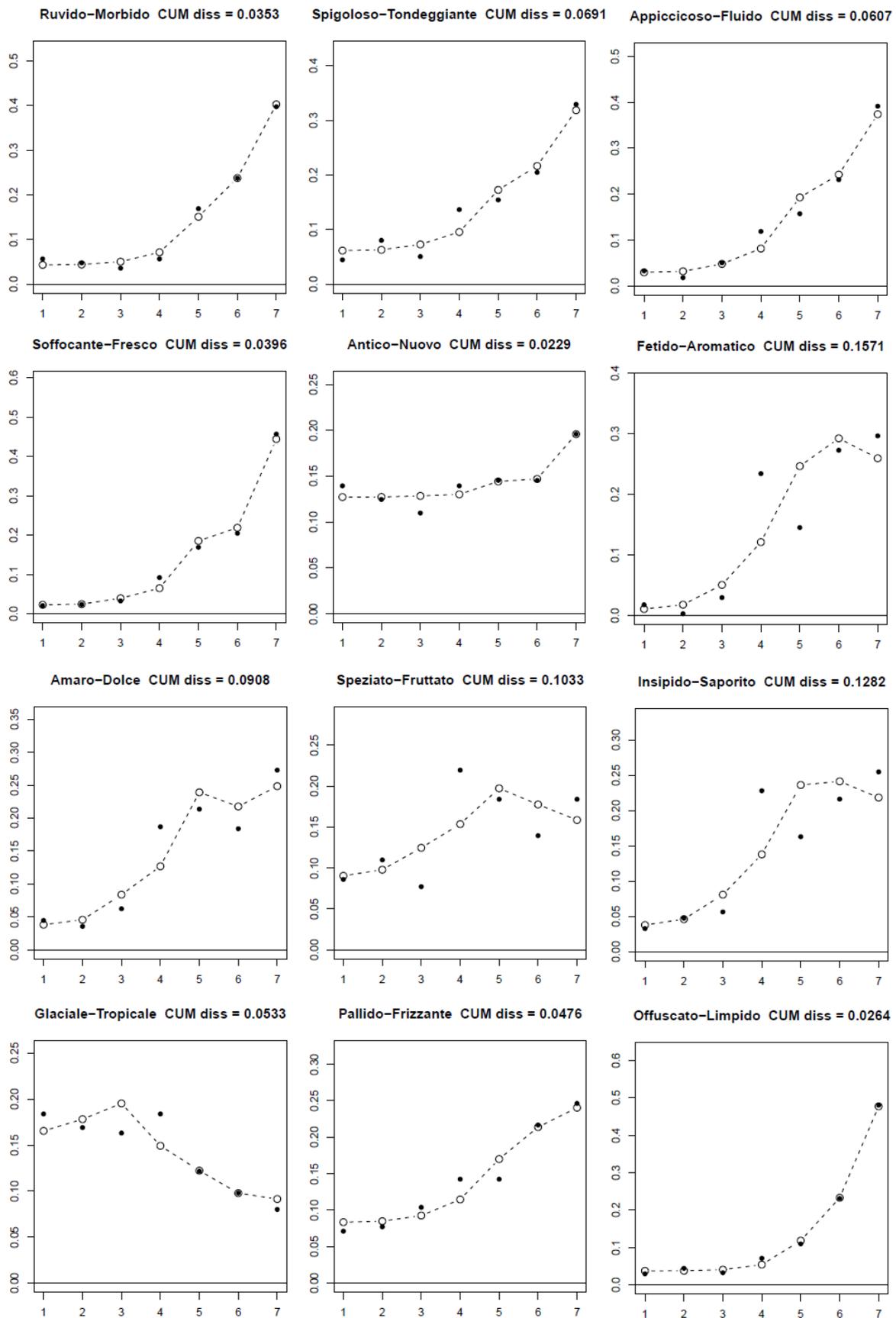
Nel caso delle scale “Insipido-Saporito” e “Speziato-Fruttato”, invece, le frequenze più elevate si trovano in corrispondenza di una categoria posta nella parte destra della scala e dell’alternativa di risposta centrale. Il *feeling* verso quest’ultima, però, è espresso dal valore di  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ , che – a differenza di  $\widehat{\xi}_D$  – non è totalmente indipendente dal valore di  $\widehat{\xi}_U$ , il quale dovrà assumere un valore elevato per rappresentare l’alta frequenza della categoria nella parte destra della scala. Di conseguenza, dato che  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$  dipende negativamente da  $\widehat{\xi}_U$ , esso non riuscirà a risultare così elevato come servirebbe per rappresentare la frequenza relativa alla categoria centrale.

Ad ogni modo, nonostante questo, la percentuale di risposte da modificare per ottenere un perfetto livello di adattamento non risulta eccessivamente elevata anche per queste due scale; la bontà della rappresentazione può quindi ritenersi sufficiente. Quindi, anche in questi casi, i valori stimati dal modello CUM potranno essere impiegati per ricostruire le componenti di *feeling* e di incertezza che si può ritenere abbiano caratterizzato il processo decisionale dei visitatori della sala azzurra della Pinacoteca. Eventualmente, per queste scale andrà tenuto presente che il valore di  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$  tende a sottostimare il *feeling* manifestato dai rispondenti verso la categoria centrale della scala.

La Tabella 4.3. riporta anche i valori degli *information criteria* AIC e BIC, per il modello CUM e per il CUB. Dall'indice AIC emerge che l'utilizzo del modello CUM – più complesso, in quanto richiede di stimare un parametro in più – risulta giustificato dal miglioramento che si ottiene nella massimizzazione della funzione di log-verosimiglianza. Questo si verifica per tutte le scale a differenziale semantico, tranne nel caso di “Antico-Nuovo”, dove sarebbe più opportuno l'utilizzo del CUB. Invece, l'indice BIC – più penalizzante rispetto all'AIC per i modelli con più parametri – indica che il modello CUB sarebbe da prediligere, oltre che per la scala “Antico Nuovo”, anche per le scale “Speziato-Fruttato”, “Glaciale-Tropicale”, “Pallido-Frizzante” e “Offuscato-Limpido”.

Nella maggior parte dei casi, però, è giustificata l'applicazione del modello CUM, sulla base del quale, una volta ottenute le stime dei parametri, è possibile calcolare le probabilità che, secondo il modello, ogni alternativa di risposta di ciascuna delle scale ha di essere scelta dai rispondenti. Queste probabilità stimate in base al modello CUM sono rappresentate graficamente, per le 12 scale a differenziale semantico, nella Figura 4.9, nella quale è anche possibile confrontare queste probabilità teoriche con le frequenze relative effettivamente osservate nella sala azzurra della Pinacoteca.

Può essere utile confrontare le distribuzioni di frequenze e di probabilità rappresentate nella Figura 4.9. con quelle riportate nella Figura 4.3, relative all'analisi complessiva di tutte le 1024 risposte raccolte nella sala azzurra, in quella rossa e in quella verde. Dal confronto emerge una situazione che trova riscontro con quanto osservato in precedenza per le distribuzioni di frequenze relative. Infatti, si nota che, per le quattro scale “Antico-Nuovo”, “Glaciale-Tropicale”, “Speziato-Fruttato” e “Amaro-Dolce”, la funzione di massa di probabilità della variabile casuale associata al modello CUM, nella sala azzurra, presenta un andamento differente rispetto a quello che si osserva nel caso dei 1024 rispondenti.



*Figura 4.9.* – Distribuzione delle frequenze osservate (●) e delle probabilità stimate (○) dal modello CUM applicato alle risposte raccolte nella sala azzurra.

*Fonte:* Nostre elaborazioni, applicando il modello CUM alle risposte osservate.

#### 4.4.2. Valori stimati dei parametri del modello CUM per la sala azzurra

La Tabella 4.4. riporta, per il modello CUM, i valori stimati di  $\hat{\pi}$ ,  $1 - \hat{\pi}$  e delle tre misure di *feeling*  $\widehat{\xi}_D$ ,  $\widehat{\xi}_U$  e  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ . Inoltre, sono riportati i valori che si otterrebbero applicando il modello CUM e gli *standard error* relativi a entrambi i modelli.

Tabella 4.4. – Valori stimati dei parametri del modello CUM relativi alla sala azzurra (tra parentesi si trovano i valori relativi agli *standard error*).

Fonte: Nostre elaborazioni, applicando il modello CUM alle risposte raccolte nella sala azzurra.

Item	MODELLO CUM					MODELLO CUB			
	$\hat{\pi}$	$1 - \hat{\pi}$	$\widehat{\xi}_D$	$\widehat{\xi}_U$	$1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$	$\hat{\pi}$	$1 - \hat{\pi}$	$\hat{\xi}$	$1 - \hat{\xi}$
Ruvido-Morbido	0,6996 (0,0434)	0,3004	0,0540 (0,016)	0,8014 (0,02)	0,1446 (0,0227)	0,6619 (0,0426)	0,3381	0,1128 (0,012)	0,8873
Spigoloso-Tondeggiante	0,5724 (0,0581)	0,4276	0,0795 (0,0209)	0,7664 (0,0289)	0,1541 (0,0253)	0,4797 (0,0535)	0,5204	0,1168 (0,0201)	0,8832
Appiccicoso-Fluido	0,7979 (0,0477)	0,2021	0,0875 (0,0162)	0,7564 (0,0209)	0,1561 (0,0193)	0,6834 (0,0494)	0,3166	0,1291 (0,0152)	0,8709
Soffocante-Fresco	0,8435 (0,0401)	0,1565	0,0830 (0,0136)	0,7938 (0,0185)	0,1232 (0,0161)	0,7430 (0,0449)	0,2570	0,1133 (0,013)	0,8867
Antico-Nuovo	0,1097 (0,059)	0,8903	<u>0,0627</u> (0,0808)	0,8550 (0,12)	<u>0,0823</u> (0,0907)	0,0865 (0,0442)	0,9135	<u>0,0475</u> (0,0639)	0,9525
Fetido-Aromatico	0,9338 (0,0305)	0,0662	0,1120 (0,0145)	0,6448 (0,0182)	0,2432 (0,0216)	0,8911 (0,0389)	0,1089	0,2263 (0,0116)	0,7737
Amaro-Dolce	0,7527 (0,0575)	0,2473	0,1560 (0,0204)	0,6568 (0,0239)	0,1873 (0,0249)	0,6284 (0,0586)	0,3717	0,2248 (0,018)	0,7752
Speziato-Fruttato	0,3862 (0,0814)	0,6138	0,1915 (0,0394)	0,5685 (0,0518)	0,2400 (0,0568)	0,2964 (0,0673)	0,7036	0,3246 (0,0403)	0,6754
Insipido-Saporito	0,7507 (0,06)	0,2493	0,1407 (0,0204)	0,6249 (0,0242)	0,2345 (0,0261)	0,6328 (0,061)	0,3672	0,2360 (0,0185)	0,7640
Glaciale-tropicale	0,3763 (0,0865)	0,6237	0,5878 (0,0513)	0,1837 (0,0449)	0,2286 (0,0528)	0,2641 (0,0687)	0,7359	0,7262 (0,0531)	0,2738
Pallido-Frizzante	0,4166 (0,069)	0,5834	0,0775 (0,0352)	0,7225 (0,0409)	0,2000 (0,0373)	0,3497 (0,0546)	0,6503	0,1389 (0,0265)	0,8611
Offuscato-Limpido	0,7369 (0,0417)	0,2631	0,0331 (0,0125)	0,8421 (0,0183)	0,1247 (0,0173)	0,6936 (0,0395)	0,3065	0,0797 (0,0105)	0,9203

Confrontando le stime dei parametri del modello CUM con i rispettivi errori standard, si può notare che la scala “Antico-Nuovo” costituisce l’unico caso in cui questi ultimi assumono valori elevati rispetto alle stime. Gli *standard error* di  $\widehat{\xi}_D$  e  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ , infatti, superano i valori stimati dei relativi parametri, indicando una non molto elevata attendibilità delle due stime in questione.<sup>78</sup> Per questa scala, invece, il terzo valore stimato, riguardante la misura di *feeling* verso la parte destra della scala ( $\widehat{\xi}_U$ ), è caratterizzato da un valore dell’errore standard molto contenuto, se confrontato con la relativa stima.

#### 4.4.3. Rappresentazione delle misure di *feeling* e di incertezza per la sala azzurra

Molte delle scale a differenziale semantico oggetto di analisi presentano una prevalenza di risposte in corrispondenza delle categorie poste nella parte destra della scala. Questo si riscontra per tutte le scale, salvo quella individuata dalla coppia di aggettivi “Glaciale-Tropicale”; essa, infatti, è caratterizzata dalla prevalenza di un *feeling* che orienta la maggior parte delle risposte verso le prime categorie della scala, riferite al termine posto sul suo polo sinistro.

Quanto appena affermato trova riscontro nel *ternary plot* rappresentato in Figura 4.10, che riporta le misure di *feeling* e di incertezza relative alle 12 scale a differenziale semantico. Si può notare che la quasi totalità dei punti si trova nell’area superiore del grafico, cioè quella in cui sono collocate le scale caratterizzate da valori di  $\widehat{\xi}_U$  superiori a 0,5, ovvero dalla prevalenza di un *feeling* verso le categorie posizionate nella parte destra della scala a differenziale semantico. Pertanto, tra i rispondenti prevale la convinzione secondo cui le percezioni suscitate dalla visita della sala azzurra della Pinacoteca sono meglio descritte dal termine posizionato sull’estremo destro delle scale in questione.

Un solo punto – quello relativo alla scala “Glaciale-Tropicale” – si trova nell’area inferiore sinistra del *ternary plot*, caratterizzata da valori di  $\widehat{\xi}_D$  superiori a 0,5, che segnalano la prevalenza di un *feeling* verso la parte sinistra della scala a differenziale semantico. Tra i due aggettivi posti agli estremi della scala, infatti, secondo la maggior parte dei rispondenti, la percezione suscitata in loro dalla visita della sala azzurra è meglio descritta dalle alternative di risposta più vicine al termine “glaciale”.

---

<sup>78</sup> Le stime, infatti, sono ottenute per mezzo di uno stimatore, la cui variabilità – espressa dagli *standard error* – risulta elevata rispetto al suo valore atteso. Considerando l’ipotesi nulla che il parametro di interesse assuma valore 0, essa può essere rifiutata con un livello di significatività poco elevato, in quanto il valore del rapporto tra la stima e il relativo errore standard risulta contenuto.

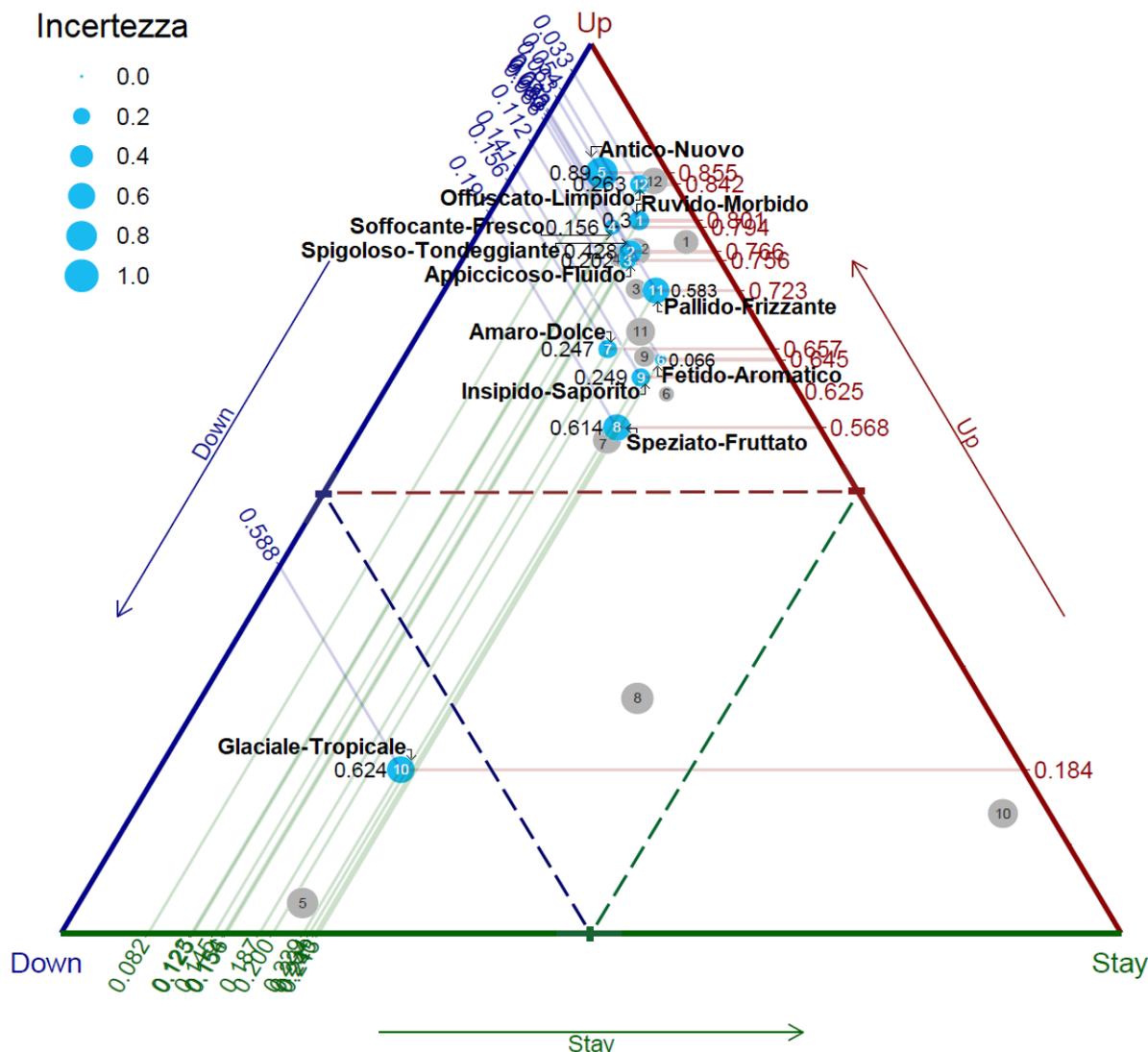


Figura 4.10. – Rappresentazione grafica (su un unico ternary plot) dei valori stimati dal modello CUM per le 12 scale a differenziale semantico relative alla sala azzurra.

Fonte: Nostre elaborazioni sul ternary plot risultante dall'applicazione del modello CUM.

Nella Figura 4.10, oltre ai punti di colore azzurro che si riferiscono alle risposte alle 12 scale a differenziale semantico raccolte nella sala azzurra, sono anche rappresentati dei punti di colore grigio, espressione dei risultati dell'applicazione del modello CUM a tutte le 1024 risposte raccolte nelle tre sale della Pinacoteca (riportati anche nella Figura 4.4.). Rappresentando nello stesso grafico anche questi risultati è possibile vedere in modo immediato le peculiarità che si riscontrano nell'analisi delle percezioni dei soli visitatori della sala azzurra. Riguardo alla scala “Glaciale-Tropicale”, per esempio, è possibile notare che il punto che la rappresenta si trova in una posizione molto diversa rispetto alla percezione “media” di tutti i 1024 rispondenti. Quest'ultima corrisponde a un *feeling* prevalentemente neutrale, mentre per i visitatori della sala azzurra prevale un *feeling* verso la parte sinistra della scala, e cioè verso l'aggettivo “glaciale”.

Anche nel caso di “Speziato-Fruttato” la percezione manifestata dai rispondenti intervistati nella sala azzurra risulta diversa rispetto alla percezione “media”, infatti, risulta prevalente il *feeling* verso la parte destra della scala (e quindi verso l’aggettivo “fruttato”), mentre nel caso dei 1024 visitatori prevale un *feeling* neutrale (anche se le misure del *feeling* verso la parte sinistra e destra della scala non sono di molto inferiori a  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ ).

Una differenza meno marcata si riscontra per la scala “Amaro-Dolce”: dalla Figura 4.10. si può notare che, nel caso della sala azzurra, il punto a essa associato risulta posizionato leggermente più in alto, indicando la presenza di una maggiore intensità del *feeling* verso la parte destra della scala. Ciò che appare più evidente rispetto al caso dei 1024 rispondenti, però, è il valore della misura di incertezza  $1 - \widehat{\pi}$ , che, nella sala azzurra, risulta molto più contenuto (con un valore di 0,274 anziché 0,665). Questo significa che molti visitatori di tale sala hanno risposto a questa scala in base a un’attenta valutazione del proprio *feeling* – sulla base della quale è l’aggettivo “dolce” a esprimere meglio la percezione suscitata in loro dalla visita della sala.

Nella Figura 4.10, il punto che risulta collocato nella posizione più distante da quella relativa al caso dei 1024 visitatori corrisponde alla scala “Antico-Nuovo”: mentre la percezione “media” è caratterizzata dalla prevalenza di un *feeling* verso la parte sinistra della scala (e cioè verso il termine “antico”), tra i visitatori della sala azzurra prevale la convinzione che sia l’aggettivo posto sull’estremo destro (ossia “nuovo”) a meglio descrivere la loro percezione. Va però precisato che, nella sala azzurra, le risposte a questa scala a differenziale semantico sono caratterizzate da un’incertezza molto elevata, dato che  $1 - \widehat{\pi}$  assume un valore di 0,885. Infatti, dalla relativa distribuzione di frequenze (riportata in Figura 4.9.), si può vedere che le risposte tendono a distribuirsi tra tutte le categorie della scala, anche se vi è una leggera prevalenza di quelle collocate nella sua parte destra; è questo a determinare il valore elevato della misura di *feeling*  $\widehat{\xi}_U$ .

Le rimanenti scale a differenziale semantico, invece, nella sala azzurra presentano risultati molto simili a quelli che si osservano nel caso dei 1024 rispondenti, sia per quanto riguarda la componente di incertezza (come segnala la dimensione dei punti in Figura 4.10.), sia per quella di *feeling* (che determina la posizione dei punti). Si tratta delle scale “Ruvido-Morbido”, “Spigoloso-Tondeggiante”, “Appiccicoso-Fluidico”, “Soffocante-Fresco”, “Fetido-Aromatico”, “Insipido-Saporito”, “Pallido-Frizzante” e “Offuscato-Limpido; esse sono caratterizzate dalla prevalenza di un *feeling* verso la parte destra della scala. È quindi l’aggettivo posizionato sul polo

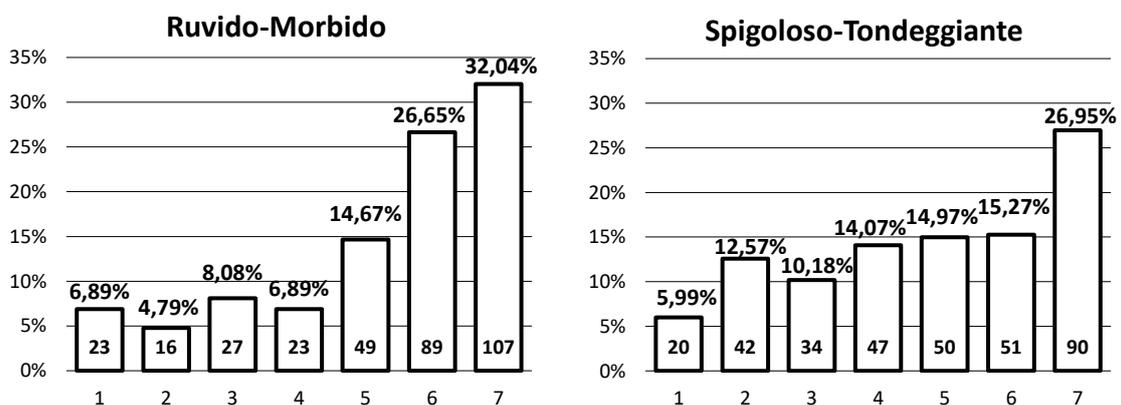
destro di queste scale a rappresentare meglio le percezioni sensoriali della maggior parte dei visitatori della sala azzurra, analogamente a quanto avviene anche per le scale “Antico-Nuovo”, “Amaro-Dolce” e “Speziato-Fruttato”.

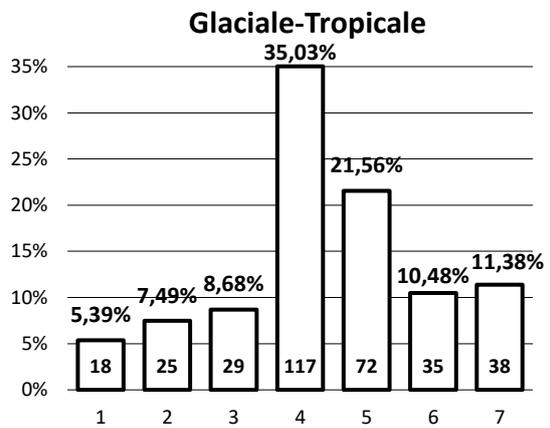
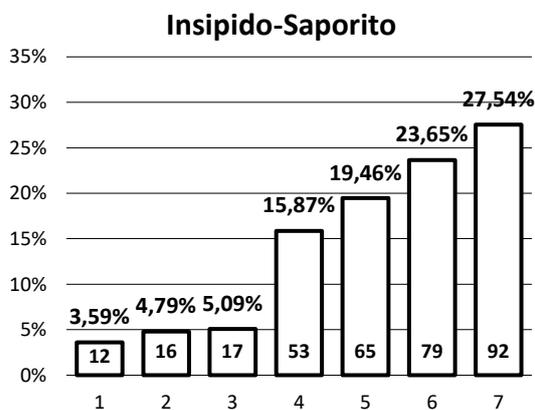
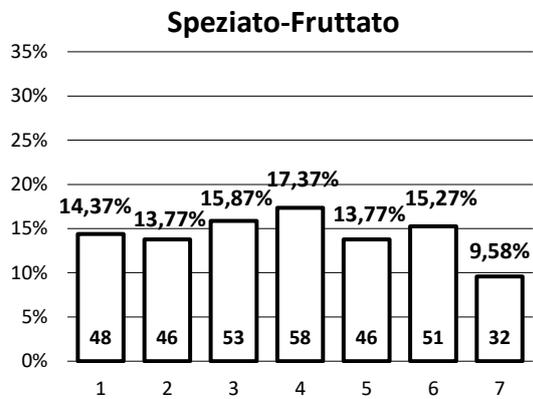
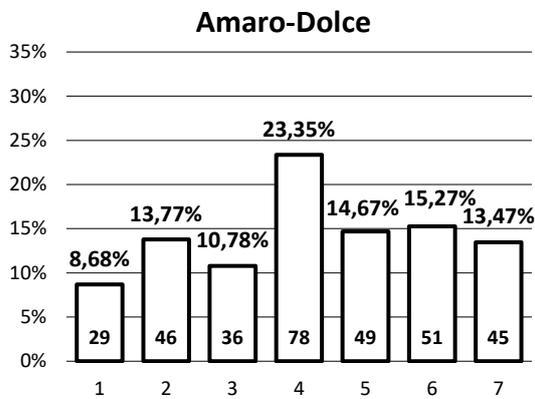
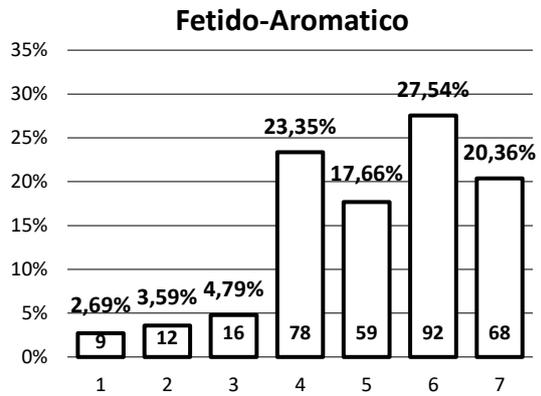
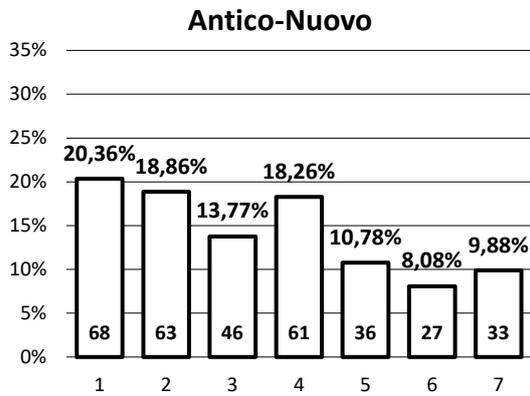
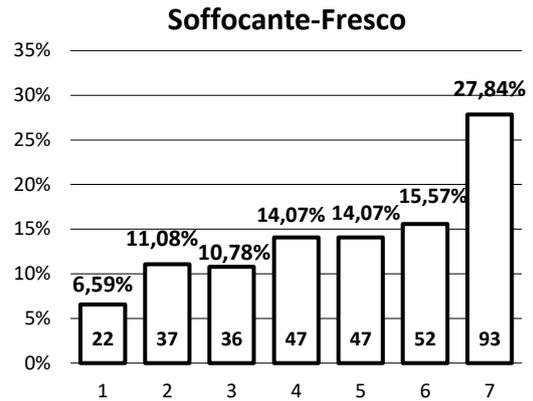
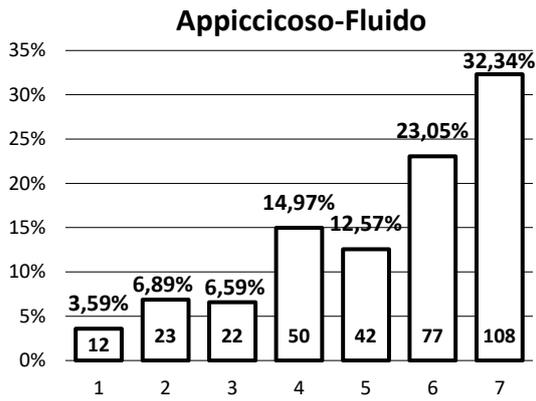
Pertanto, la visita della sala III della Pinacoteca tende a suscitare nei rispondenti delle percezioni legate a qualcosa di “morbido”, “tondeggiante” e “fluido” (per quanto riguarda il tatto), di “fresco”, “nuovo” e “aromatico” (relativamente all’olfatto), di “dolce”, “fruttato” e “saporito” (rispetto al gusto) e associate a qualcosa di “glaciale”, “frizzante” e “limpido” (per quanto concerne la vista). Si tratta di percezioni che risultano simili a quelle “medie” derivanti dall’analisi complessiva delle 1024 risposte raccolte, salvo per quanto riguarda l’odore di “nuovo” e la sensazione visiva legata a qualcosa di “glaciale”.

#### 4.5. Applicazione del modello CUM alle risposte raccolte nella sala rossa

Nella sala rossa della Pinacoteca Tosio-Martinengo – cioè la sala numero VI, che ospita le opere dei pittori cinquecenteschi Moretto, Savoldo e Lotto – sono stati intervistati 334 visitatori, pari al 32,6% del totale dei rispondenti al questionario di analisi sensoriale.

Le distribuzioni di frequenze delle risposte alle 12 scale a differenziale semantico raccolte in questa sala sono riportate in Figura 4.11, dalla quale si può notare che, per la maggior parte delle scale, non si riscontrano rilevanti differenze rispetto alle frequenze che si osservano nel caso di tutti i 1024 rispondenti (che sono riportate in Figura 4.2.). Infatti, in molti casi, sia la forma delle distribuzioni di probabilità, sia i valori delle singole frequenze relative percentuali risultano simili a quelle in Figura 4.2., eccetto per le scale “Amaro-Dolce” e “Glaciale-Tropicale” – per le quali, nella sala rossa, l’alternativa di risposta centrale presenta una frequenza marcatamente superiore rispetto al caso dei 1024 rispondenti.





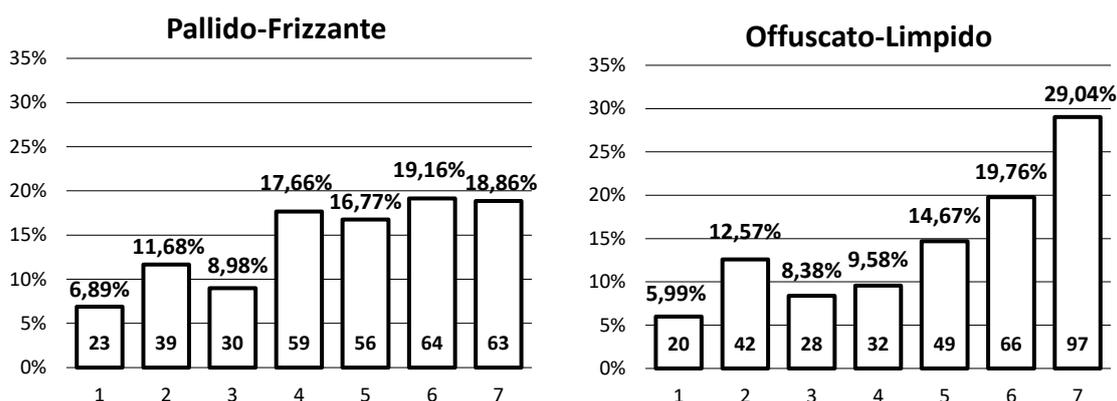


Figura 4.11. – Distribuzione di frequenze relative (in percentuale) e assolute (nella parte bassa di ogni grafico) delle risposte raccolte nella sala rossa della Pinacoteca.

Fonte: Nostre elaborazioni sulle risposte al questionario di analisi sensoriale svolto presso la Pinacoteca.

#### 4.5.1. Adattamento del modello CUM ai dati raccolti nella sala rossa

Applicando il modello CUM alle 334 risposte ottenute dai visitatori della sala rossa della Pinacoteca, l'indice di dissimilarità per le 12 scale a differenziale semantico assume i valori riportati in Tabella 4.5.

Tabella 4.5. – Livello di adattamento dei modelli CUM e CUB nella sala rossa.

Fonte: Nostre elaborazioni, applicando il modello CUM alle risposte osservate.

Scala a differenziale semantico	Modello CUM			Modello CUB		
	Diss	AIC	BIC	Diss	AIC	BIC
Ruvido-Morbido	0,0286	1156	1167	0,0333	<u>1154</u>	<u>1161</u>
Spigoloso-Tondeggiante	0,0593	1261	1272	0,0761	1264	<u>1271</u>
Appiccicoso-Fluidico	0,0754	1180	1191	0,0824	1184	1192
Soffocante-Fresco	0,0503	1256	1268	0,0572	1258	<u>1265</u>
Antico-Nuovo	0,0636	1282	1293	0,0760	1283	<u>1291</u>
Fetido-Aromatico	0,1037	1159	1170	0,1358	1165	1173
Amaro-Dolce	0,0938	1292	1304	0,0963	<u>1290</u>	<u>1298</u>
Speziato-Fruttato	0,0492	1301	1313	0,0464	<u>1300</u>	<u>1307</u>
Insidido-Saporito	0,0599	1165	1176	0,1098	1176	1184
Glaciale-tropicale	0,0346	1179	1191	0,1516	1210	1218
Pallido-Frizzante	0,0696	1276	1288	0,0870	1278	<u>1285</u>
Offuscato-Limpido	0,0413	1232,1	1244	0,0617	<u>1231,7</u>	<u>1239</u>

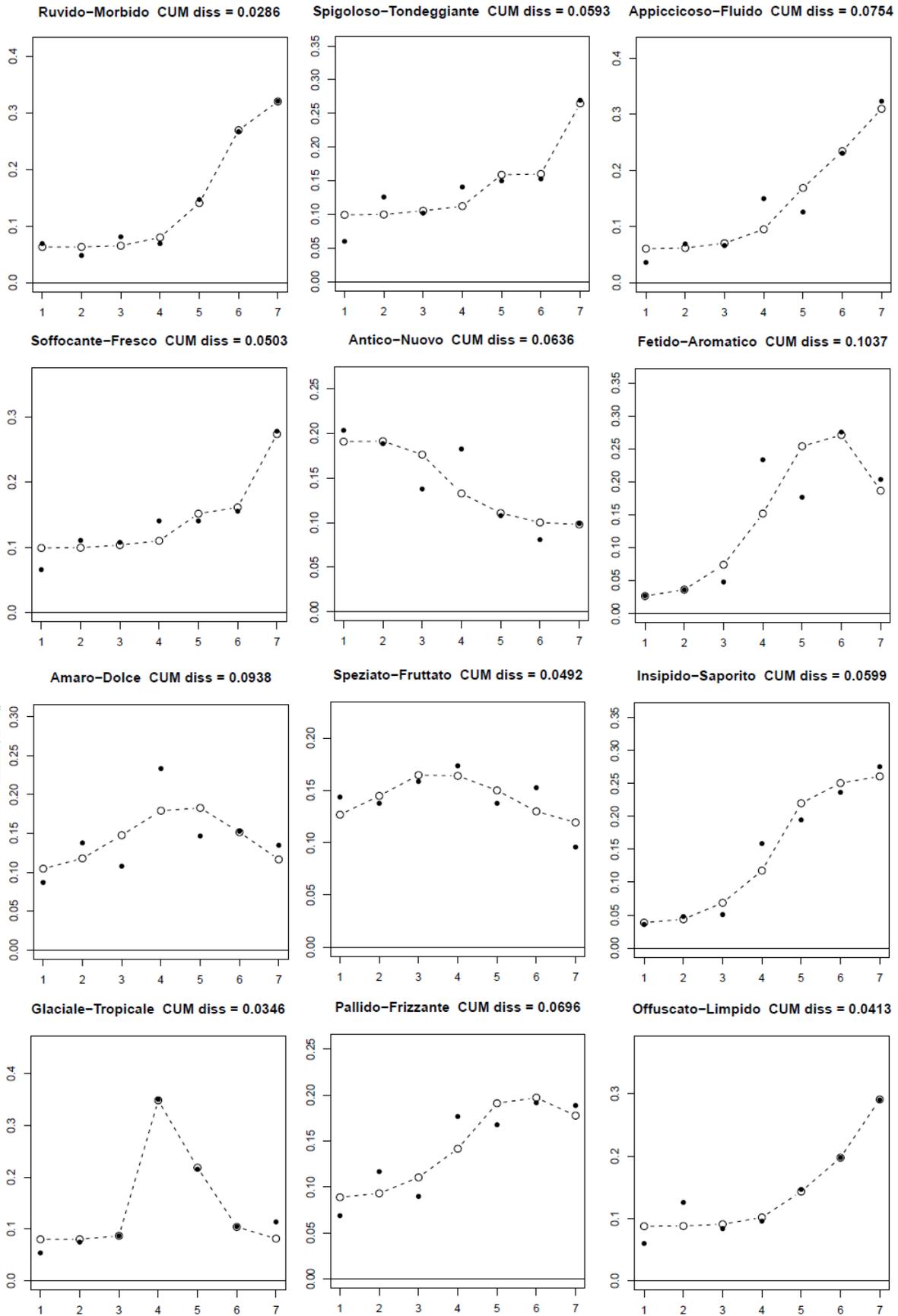
Si può notare che il livello di adattamento del modello CUM risulta soddisfacente per tutte le 12 scale, in quanto l'indice di dissimilarità assume valori inferiori a 0,10, segnalando che, per

ottenere un perfetto adattamento del modello ai dati osservati, sarebbe necessario cambiare al massimo il 10% delle risposte. Nel caso della scala individuata dalla coppia di aggettivi “Fetido-Aromatico”, l’indice di dissimilarità risulta leggermente superiore, essendo pari a 0,1037. Non trattandosi di un valore eccessivamente elevato, si può ritenere che, come avviene per tutte le altre scale a differenziale semantico analizzate, il modello CUM rappresenti in modo soddisfacente le risposte osservate.

La Tabella 4.5. riporta anche i valori degli indici AIC e BIC relativi al modello CUB e CUM. Sulla base dell’indice BIC, più penalizzante per il modello che presenta il maggior numero di parametri, l’applicazione del modello CUM sarebbe giustificata soltanto per le scale “Appiccicoso-Fluido”, “Fetido-Aromatico”, “Insiapido-Saporito” e “Glaciale-Tropicale”. Dai valori dell’indice AIC, invece, emerge che, per la maggior parte delle scale, l’applicazione del CUM risulta giustificata – nonostante la maggiore complessità del modello – dal valore più elevato che assume la funzione di log-verosimiglianza in corrispondenza delle stime ottenute. Il modello CUB sarebbe invece preferibile – secondo l’indice AIC – soltanto nel caso delle scale “Ruvido-Morbido”, “Amaro-Dolce”, “Speziato-Fruittato” e “Offuscato-Limpido”. Inoltre, scegliendo il modello CUM è possibile ottenere informazioni più analitiche sulla componente di *feeling*.

Dall’applicazione di tale modello alle risposte raccolte nella sala rossa, sulla base delle stime ottenute è possibile calcolare la probabilità che, secondo il modello, ogni alternativa di risposta ha di essere scelta; la Figura 4.12. riporta i valori di tali probabilità stimate in base al CUM.

Dal confronto con la Figura 4.3, relativa all’analisi di tutte le 1024 risposte raccolte, si può notare che l’andamento della variabile casuale associata al modello CUM risulta, nella maggior parte delle scale, molto simile a quello che si osserva per la sala rossa (in Figura 4.12.). Fanno eccezione le due scale “Amaro-Dolce” e “Glaciale-Tropicale”, che, come anticipato, sono anche quelle che presentano le differenze più significative nelle distribuzioni di frequenze. Le probabilità stimate dal modello CUM per la scala “Amaro-Dolce”, rispetto al caso dei 1024 rispondenti, risultano più elevate per l’alternativa di risposta centrale e più contenute per le ultime categorie della scala. Nel caso di “Glaciale-Tropicale”, invece, tutte le alternative di risposta presentano probabilità stimate più basse, ad eccezione della categoria centrale, a cui è associata una probabilità superiore.



*Figura 4.12.* – Distribuzione delle frequenze osservate (●) e delle probabilità stimate (○) dal modello CUM applicato alle risposte raccolte nella sala rossa.

*Fonte:* Nostre elaborazioni, applicando il modello CUM alle risposte osservate.

#### 4.5.2. Valori stimati dei parametri del modello CUM per la sala rossa

Dato che il livello di adattamento del modello CUM risulta soddisfacente, si può ritenere che le stime dei suoi parametri (riportate in Tabella 4.6.) rappresentino adeguatamente le componenti di incertezza e di *feeling* che si può ritenere abbiano caratterizzato il processo di risposta alle 12 scale a differenziale semantico analizzate.

Tabella 4.6. – Valori stimati dei parametri del modello CUM relativi alla sala rossa (tra parentesi si trovano i valori relativi agli *standard error*).

Fonte: Nostre elaborazioni, applicando il modello CUM alle risposte raccolte nella sala rossa.

Item	MODELLO CUM					MODELLO CUB			
	$\hat{\pi}$	$1 - \hat{\pi}$	$\hat{\xi}_D$	$\hat{\xi}_U$	$1 - \hat{\xi}_D - \hat{\xi}_U$	$\hat{\pi}$	$1 - \hat{\pi}$	$\hat{\xi}$	$1 - \hat{\xi}$
Ruvido-Morbido	0,5604 (0,0525)	0,4396	0,0224 (0,0254)	0,7713 (0,0249)	0,2063 (0,0344)	0,5523 (0,0458)	0,4477	0,1221 (0,0142)	0,8779
Spigoloso-Tondeggiante	0,3066 (0,0666)	0,6934	0,0856 (0,0374)	0,8146 (0,0545)	0,0998 (0,0375)	0,2177 (0,0482)	0,7823	0,0565 (0,0308)	0,9435
Appiccicoso-Fluidido	0,5784 (0,0626)	0,4216	0,0687 (0,0226)	0,7557 (0,0307)	0,1756 (0,0252)	0,4842 (0,0519)	0,5158	0,1147 (0,0193)	0,8853
Soffocante-Fresco	0,3062 (0,0652)	0,6938	0,0717 (0,0372)	0,8297 (0,0536)	0,0987 (0,0362)	0,2312 (0,0465)	0,7688	0,0543 (0,0268)	0,9457
Antico-Nuovo	0,3182 (0,0782)	0,6818	0,6649 (0,0582)	0,1124 (0,0457)	0,2227 (0,0504)	0,2336 (0,0636)	0,7664	0,8346 (0,0522)	0,1654
Fetido-Aromatico	0,8259 (0,0505)	0,1741	0,1246 (0,0203)	0,5806 (0,0223)	0,2949 (0,0297)	0,7619 (0,0505)	0,2381	0,2615 (0,0143)	0,7385
Amaro-Dolce	0,2866 (0,1112)	0,7134	0,2094 (0,0986)	0,3703 (0,1196)	0,4203 (0,1979)	0,2617 (0,07)	0,7383	0,4227 (0,047)	0,5773
Speziato-Fruttato	0,1919 (0,1072)	0,8081	0,3901 (0,1598)	0,2745 (0,1067)	0,3354 (0,2118)	0,1503 (0,0722)	0,8498	0,5435 (0,0878)	0,4566
Insipido-Saporito	0,7375 (0,0547)	0,2625	0,1149 (0,0207)	0,6715 (0,024)	0,2136 (0,0273)	0,6490 (0,054)	0,3510	0,1989 (0,0166)	0,8011
Glaciale-tropicale*	0,4393 (0,0529)	0,5607	0,0071 (0,0193)	0,1466 (0,027)	0,8462 (0,0355)	0,6361 (0,0583)	0,3639	0,4238 (0,0187)	0,5762
Pallido-Frizzante	0,3846 (0,077)	0,6154	0,1345 (0,0418)	0,6157 (0,0474)	0,2499 (0,0526)	0,3117 (0,0643)	0,6883	0,2332 (0,0377)	0,7669
Offuscato-Limpido	0,3869 (0,0565)	0,6131	0,0474 (0,0295)	0,8072 (0,035)	0,1455 (0,0349)	0,3520 (0,0493)	0,6480	0,0976 (0,0209)	0,9024

\* Per la scala "Glaciale-Tropicale" le stime relative al modello CUM sono state ottenute applicando l'algoritmo Newton-Raphson (NR).

Confrontando le stime dei parametri dei modelli CUM e CUB per le scale “Amaro-Dolce” e “Glaciale-Tropicale”, è possibile notare che, mentre nel caso del CUB tali scale sono caratterizzate da un livello di *feeling* identico (con un valore di  $1 - \widehat{\xi} = 0,57$ ), applicando il modello CUM, invece, emerge che le due scale in realtà corrispondono a situazioni molto diverse tra loro. Nel caso di “Glaciale-Tropicale”, infatti, i visitatori della sala rossa manifestano un forte atteggiamento neutrale tra i due aggettivi posti agli estremi della scala; per questo, il valore di  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$  risulta molto elevato (essendo pari a 0,8462). Nel caso della scala “Amaro-Dolce”, invece, tutte le tre misure di *feeling* assumono dei valori moderati; quella relativa al *feeling* neutrale (ossia  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ ) risulta anche in questo caso quella più elevata, però il suo valore è pari a 0,42 e quindi solo di poco superiore al valore di  $\widehat{\xi}_U = 0,37$ .

Relativamente all’affidabilità delle stime, si può notare che il valore degli *standard error* (riportati tra parentesi in Tabella 4.6.), per la maggior parte delle scale risulta contenuto rispetto ai valori che assumono le stime dei diversi parametri dei modelli CUM e CUB. Invece, nel caso delle scale “Speziato-Frustrato” (per la misura del *feeling* neutrale  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ ), “Offuscato-Limpido” (relativamente al parametro  $\widehat{\xi}_D$ ) e “Glaciale-Tropicale” (sempre per  $\widehat{\xi}_D$ ), gli errori standard non risultano trascurabili, se confrontati con le stime dei parametri alle quali si riferiscono.<sup>79</sup>

#### 4.5.3. Rappresentazione delle misure di *feeling* e di incertezza per la sala rossa

Rappresentando i valori stimati dei parametri del modello CUM applicato alle risposte alle 12 scale a differenziale semantico raccolte nella sala rossa, si ottiene il *ternary plot* riportato in Figura 4.13.

Si può anzitutto notare che, come avviene nel caso dei 1024 rispondenti e nel caso della sala azzurra, la maggior parte delle scale è caratterizzata dalla prevalenza di un *feeling* che orienta le risposte verso l’aggettivo posizionato sul loro estremo destro; perciò, la maggior parte dei punti sarà collocata nell’area superiore del *ternary plot*. Qui, infatti, si trovano gli otto punti corrispondenti alle scale “Ruvido-Morbido”, “Spigoloso-Tondeggiante”, “Appiccicoso-Fluidido”, “Soffocante-Fresco”, “Fetido-Aromatico”, “Insipido-Saporito”, “Pallido-Frizzante” e “Offuscato-Limpido”.

<sup>79</sup> Pertanto, le stime ottenute in queste scale per i parametri appena menzionati, potrebbero non essere del tutto precise, in quanto esse sono state ottenute sulla base di uno stimatore che è caratterizzato da un’elevata variabilità.

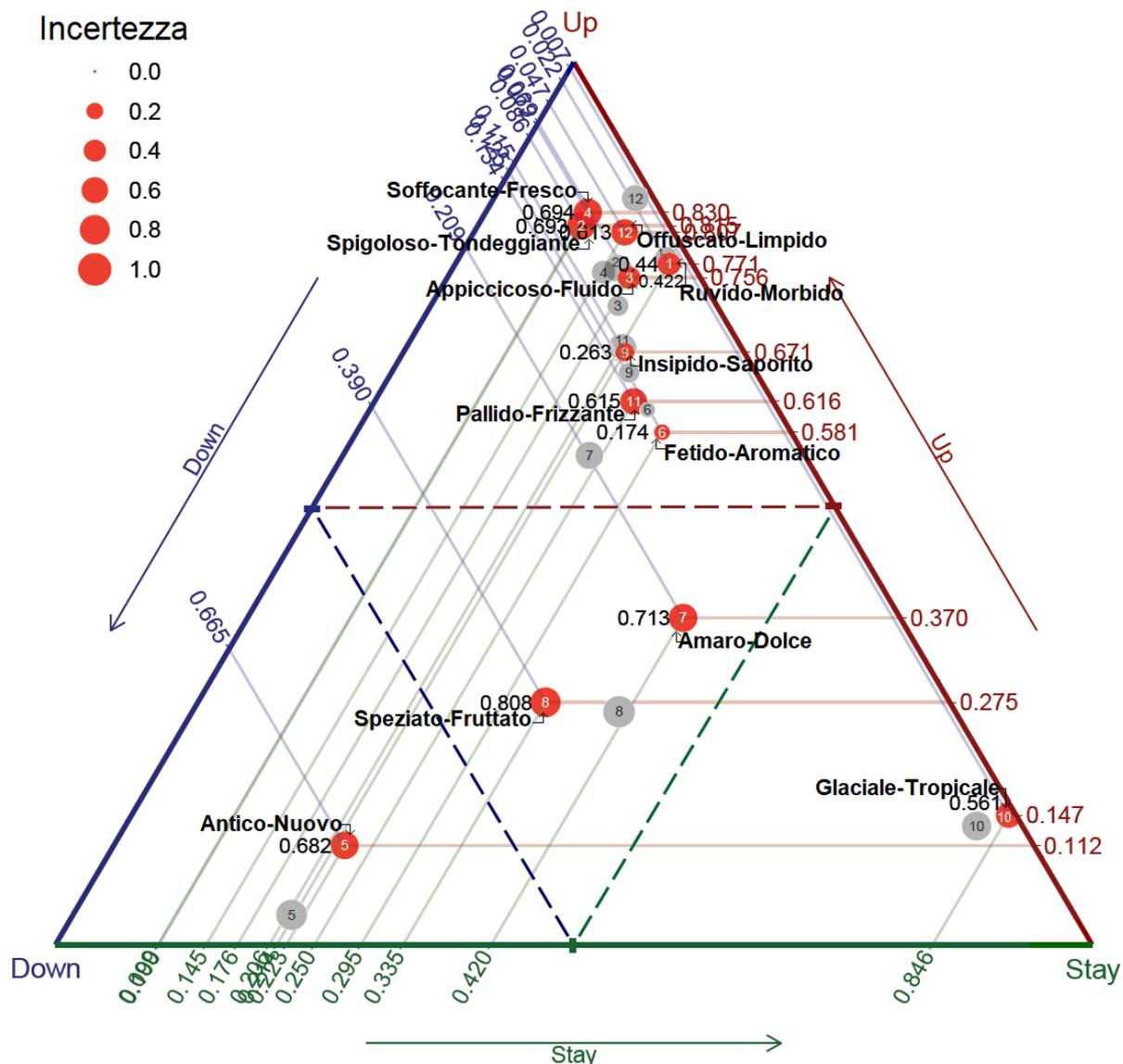


Figura 4.13. – Rappresentazione grafica (su un unico *ternary plot*) dei valori stimati dal modello CUM per le 12 scale a differenziale semantico relative alla sala rossa.

Fonte: Nostre elaborazioni sul *ternary plot* risultante dall'applicazione del modello CUM.

Invece, come accade anche nel caso dei 1024 rispondenti, l'area inferiore sinistra del grafico contiene un solo punto, corrispondente ad "Antico-Nuovo", in cui il *feeling* prevalente orienta le risposte verso la parte sinistra della scala. Nella parte inferiore destra del *ternary plot*, invece, si trova soltanto il punto relativo alla scala "Glaciale-Tropicale", caratterizzata dalla prevalenza di un *feeling* neutrale. La posizione di questo punto è molto simile a quella che si osserva nei risultati dell'analisi di tutte le 1024 risposte; tuttavia, nel caso della sala rossa, il punto ha una dimensione inferiore, in quanto il livello di incertezza che caratterizza la scala risulta inferiore. Nell'area centrale del *ternary plot*, come avviene nel caso dei 1024 rispondenti, è presente il punto relativo alla scala "Speziato-Frustrato", per la quale nessuna delle tre misure di *feeling*

risulta superiore al valore di 0,5. In questa parte del grafico è posizionato anche il punto che rappresenta la scala “Amaro-Dolce”; essa, infatti, a differenza dei risultati dell’analisi complessiva delle 1024 risposte, nella sala rossa non presenta una netta prevalenza di nessuna delle tre misure di *feeling*, in quanto il valore di  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$  (pari a 0,42) risulta di poco più elevato rispetto a  $\widehat{\xi}_U$  (che è pari a 0,37);  $\widehat{\xi}_D$  assume invece un valore di 0,21. Pertanto, alla visita della sala rossa viene associata una sensazione gustativa che è per lo più neutrale tra “amaro” e “dolce”, anche se essa risulta leggermente sbilanciata verso quest’ultimo aggettivo. Nel caso della scala “Speziato-Fruttato”, invece, la percezione prevalente sembra essere quella associata a un sapore “speziato”, anche se sono diversi i rispondenti che si ritengono neutrali tra i due aggettivi o che assocerebbero alla visita della sala rossa un sapore “fruttato”. Infine, sempre per quanto riguarda le percezioni relative al gusto, la maggior parte delle risposte si orienta verso l’aggettivo “saporito”.

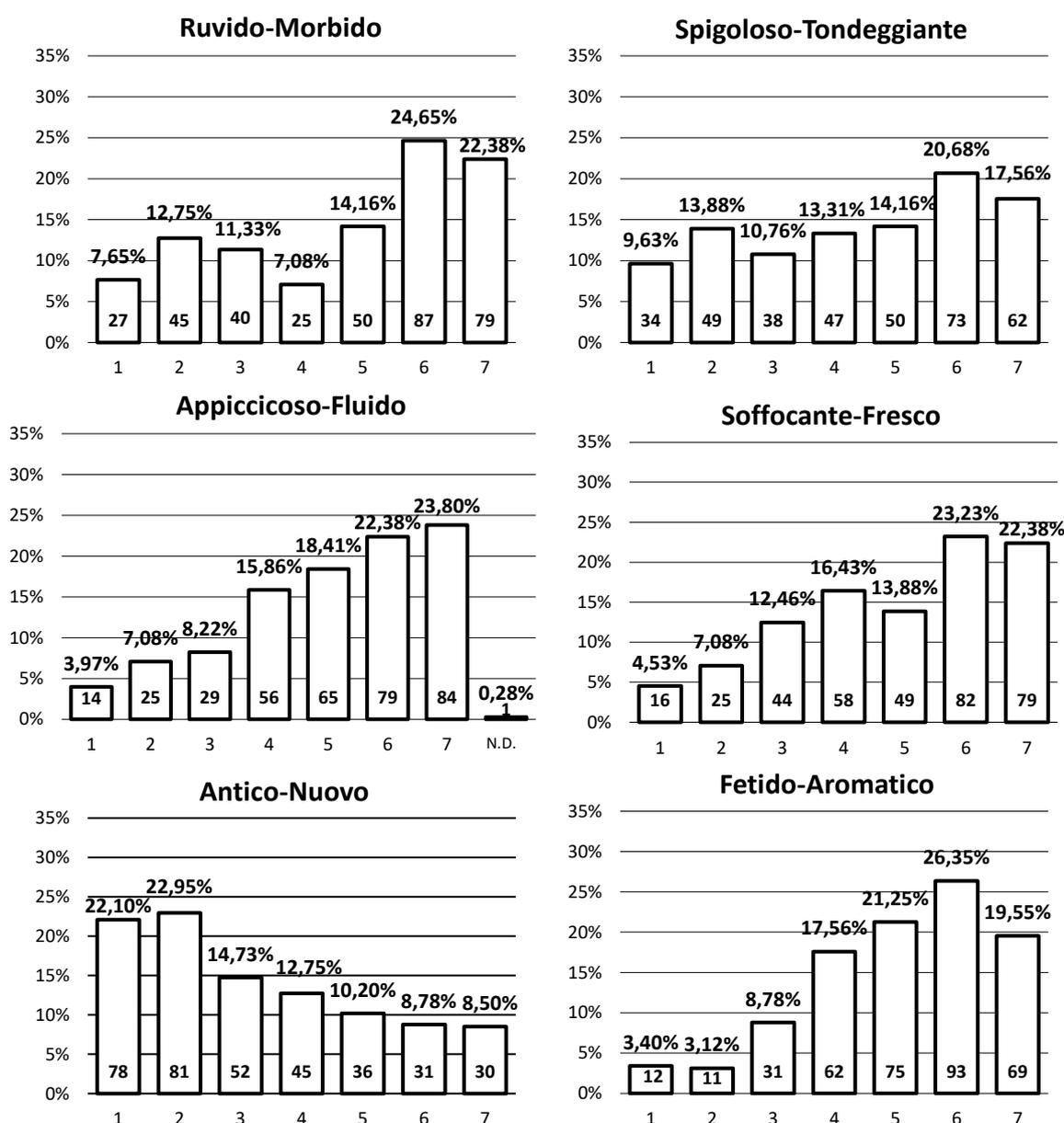
Relativamente al tatto, invece, tra i visitatori della sala rossa prevale una percezione associata a qualcosa di “morbido”, “tondeggiate” e “fluida” e, riguardo all’olfatto, una sensazione di “antico” ma allo stesso tempo “fresco” e “aromatico”. Quanto alla vista, la sensazione prevalente rimanda a qualcosa di “frizzante”, “limpido” e che non si definirebbe né “glaciale” né “tropicale”.

#### **4.6. Applicazione del modello CUM alle risposte raccolte nella sala verde**

Nella sala numero X della Pinacoteca Tosio Martinengo, che sviluppa il tema del ritratto e che è caratterizzata dalle pareti ricoperte di velluto di colore verde, sono state raccolte 353 risposte, pari al 34,5% del totale dei visitatori che hanno risposto al questionario di analisi sensoriale. In questa sala, un rispondente non ha manifestato la sua risposta alla scala “Appiccicoso-Fluida”, per la quale sono quindi state rilevate 352 risposte valide e un *missing data*.

La Figura 4.14. riporta le distribuzioni di frequenze delle risposte raccolte nella sala verde per ognuna delle 12 scale a differenziale semantico oggetto di indagine. Confrontando questa Figura con la numero 4.2, relativa a tutte le 1024 risposte raccolte, si può vedere che, rispetto a quest’ultimo caso, la sala verde è caratterizzata da distribuzioni di frequenze con un andamento più piatto; l’alternativa di risposta che viene scelta maggiormente, infatti, si presenta con una frequenza relativa inferiore al caso dei 1024 rispondenti. Questo si verifica per le scale “Ruvido-Morbido”, “Spigoloso-Tondeggiate”, “Appiccicoso-Fluida”, “Soffocante-Fresco”, “Insipido-

Saporito”, “Glaciale-Tropicale” e “Offuscato-Limpido”; pertanto, nella sala verde esse presenteranno un’incertezza maggiore, in quanto un numero rilevante di risposte ricade su categorie diverse da quelle che si presentano con la maggiore frequenza (e che esprimono cioè il *feeling* che prevale tra i rispondenti). Anche per le scale “Amaro-Dolce” e “Pallido-Frizzante”, che nel caso delle 1024 risposte presentano un’elevata incertezza, tale componente risulterà ancora più elevata nel caso della sala verde, nella quale le distribuzioni di frequenze delle risposte risultano più piatte. Al contrario, la forma delle distribuzioni di frequenze delle scale “Antico-Nuovo” e “Speziato-Fruttato” nella sala verde risulta meno piatta, in quanto le categorie più frequenti tendono a essere scelte da molti dei suoi visitatori; l’incertezza risulterà quindi minore.



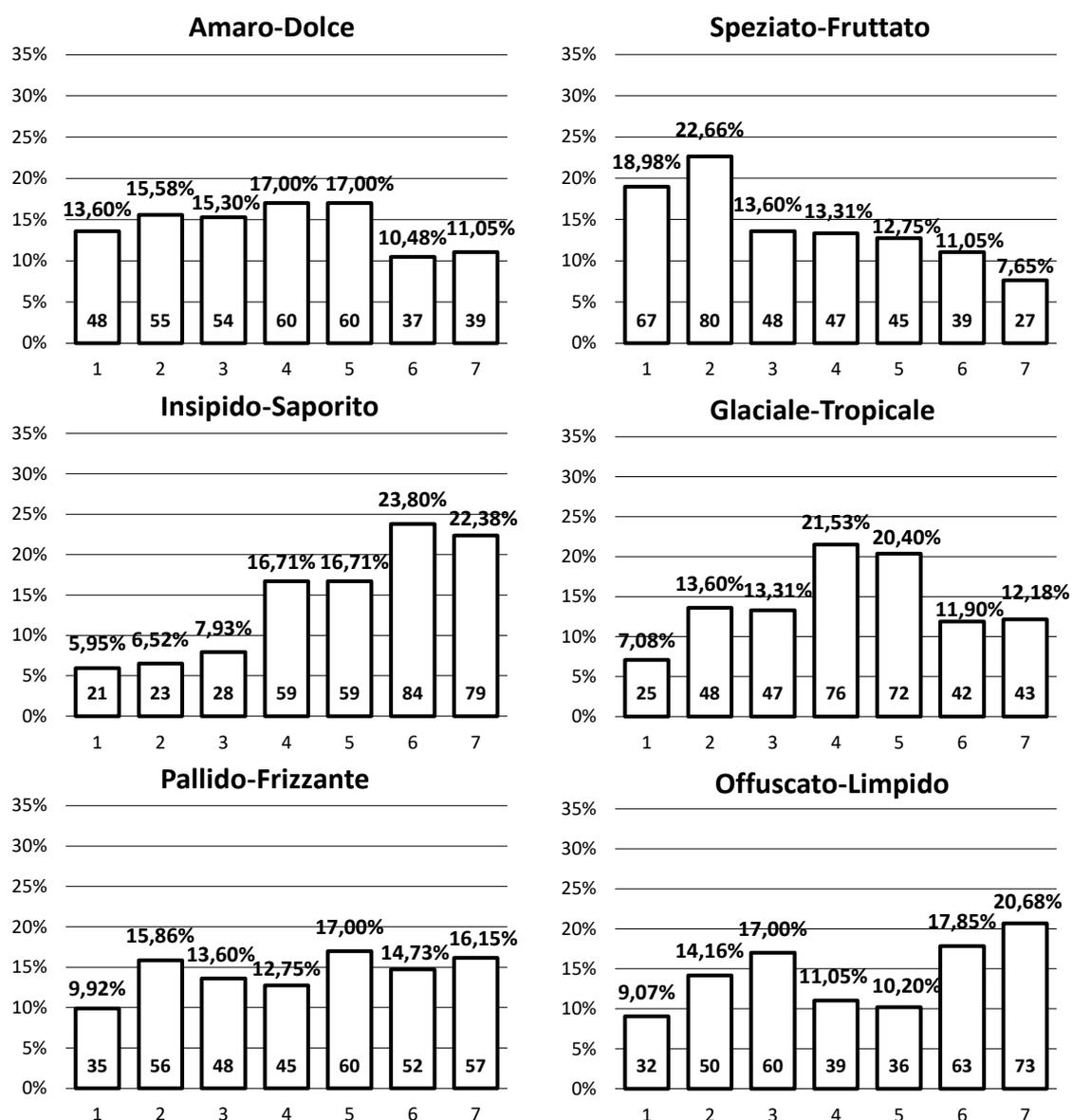


Figura 4.14. – Distribuzione di frequenze relative (in percentuale) e assolute (nella parte bassa di ogni grafico) delle risposte raccolte nella sala verde della Pinacoteca.

Fonte: Nostre elaborazioni sulle risposte al questionario di analisi sensoriale svolto presso la Pinacoteca.

#### 4.6.1. Adattamento del modello CUM ai dati raccolti nella sala verde

La Tabella 4.7. riporta i valori dell'indice di dissimilarità ottenuto confrontando le probabilità stimate dal modello CUM con le frequenze relative osservate; sono inoltre indicati i valori che si otterrebbero applicando il modello CUB. È possibile notare che il valore massimo assunto dall'indice di dissimilarità nelle 12 scale a differenziale semantico è pari a 0,911 (per “Soffocante-Fresco”). Quindi, per tutte le scale, il livello di adattamento del modello CUM ai dati risulta soddisfacente, in quanto, per fare in modo che esso si adatti perfettamente alle risposte osservate nella sala verde, sarebbe necessario cambiare al massimo circa il 9% delle risposte.

Tabella 4.7. – Livello di adattamento dei modelli CUM e CUB nella sala verde.  
 Fonte: Nostre elaborazioni, applicando il modello CUM alle risposte osservate.

Scala a differenziale semantico	Modello CUM			Modello CUB		
	<i>Diss</i>	AIC	BIC	<i>Diss</i>	AIC	BIC
Ruvido-Morbido	0,0598	1322,2	1334	0,0698	<u>1321,8</u>	<u>1330</u>
Spigoloso-Tondeggiante	0,0427	1363	1374	0,0445	<u>1361</u>	<u>1368</u>
Appiccicoso-Fluidico	0,0535	1282	1294	0,0908	1290	1298
Soffocante-Fresco	0,0911	1317	1329	0,1037	1322	1330
Antico-Nuovo	0,0259	1329	1341	0,0264	<u>1327</u>	<u>1335</u>
Fetido-Aromatico	0,0473	1240	1252	0,0901	1247	1255
Amaro-Dolce	0,0414	1372	1384	0,0472	<u>1371</u>	<u>1379</u>
Speziato-Fruttato	0,0557	1350	1361	0,0554	<u>1348</u>	<u>1356</u>
Insidio-Saporito	0,0501	1299	1310,3	0,0799	1302	<u>1310,1</u>
Glaciale-tropicale	0,0543	1350	1361	0,0687	<u>1348</u>	<u>1356</u>
Pallido-Frizzante	0,0390	1376	1387	0,0593	<u>1375</u>	<u>1383</u>
Offuscato-Limpido	0,0780	1365	1377	0,0796	<u>1363</u>	<u>1370</u>

Inoltre, nella Tabella 4.7. sono riportati i valori che gli indici AIC e BIC assumono nel caso dei modelli CUM e CUB. Si può notare che, nel caso della sala verde, questi due indici suggerirebbero che, per la maggior parte delle scale, sia più giustificato utilizzare il modello CUB. Tuttavia, il CUM, a fronte di una maggiore complessità computazionale, oltre a garantire un migliore adattamento ai dati osservati, consente – grazie alla presenza di un parametro ulteriore – di ottenere informazioni più analitiche in merito al *feeling* dei rispondenti alle scale a differenziale semantico. Inoltre, impiegando il modello CUM anche per l'analisi delle risposte raccolte nella sala verde, è possibile confrontare i risultati ottenuti con quelli presentati in precedenza per le altre due sale della Pinacoteca.

Applicando il modello CUM, sulla base delle stime ottenute per i suoi parametri è possibile calcolare la probabilità che ogni alternativa di risposta delle 12 scale analizzate ha di essere scelta. Tali probabilità stimate in base al modello CUM sono riportate nella Figura 4.15.

Dal confronto con i grafici riportati in Figura 4.3, relativi al caso dei 1024 rispondenti, si può trovare riscontro di quanto affermato in precedenza riguardo alle peculiarità che si osservano nelle distribuzioni di frequenze delle risposte raccolte nella sala verde.

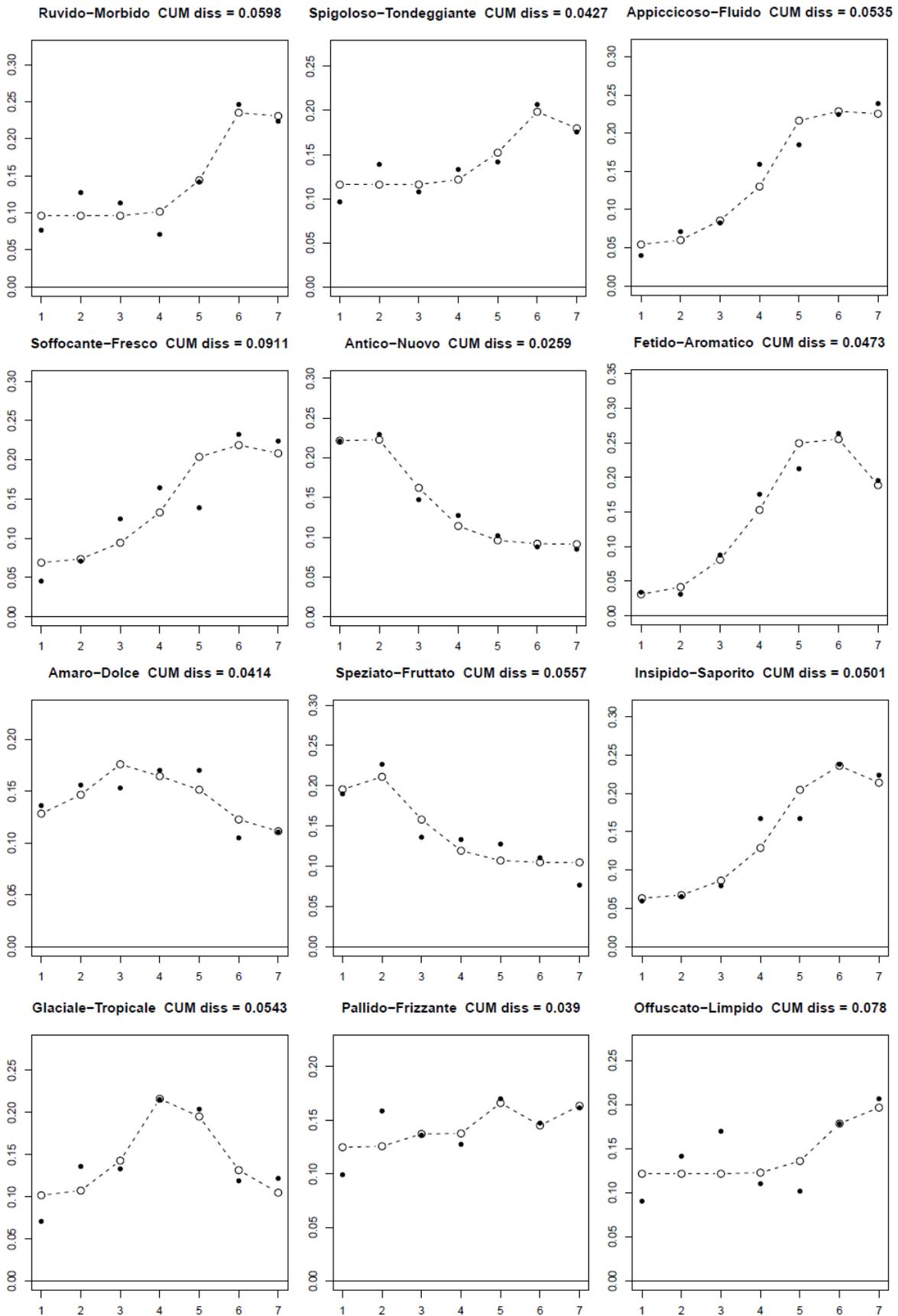


Figura 4.15. – Distribuzione delle frequenze osservate (●) e delle probabilità stimate (○) dal modello CUM applicato alle risposte raccolte nella sala verde.

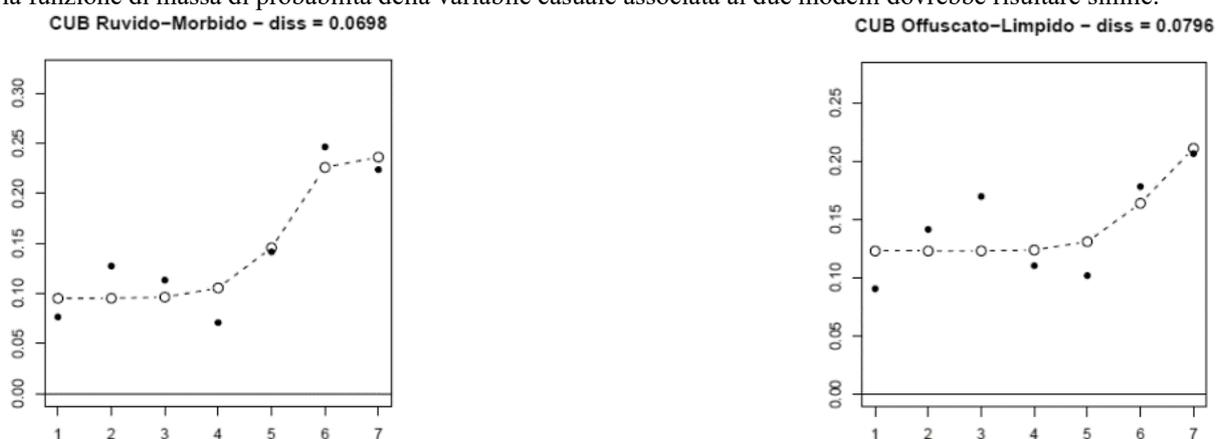
Fonte: Nostre elaborazioni, applicando il modello CUM alle risposte osservate.

Relativamente alle due scale “Amaro-Dolce” e “Pallido-Frizzante”, la funzione di massa di probabilità della variabile casuale CUM è caratterizzata da una forma più piatta di quella rappresentata in Figura 4.3.

Per le scale “Antico-Nuovo” e “Speziato-Fruttato”, si può notare che le probabilità stimate dal modello CUM per le prime alternative di risposta, nel caso della sala verde, risultano superiori rispetto al caso dei 1024 rispondenti. Per le rimanenti scale, invece, nel caso della sala verde le ultime alternative di risposta sono caratterizzate da probabilità inferiori a quelle riportate in Figura 4.3.<sup>80</sup>

<sup>80</sup> Tra queste scale, per “Ruvido-Morbido” e “Offuscato-Limpido” può essere opportuno fare una precisazione. Come verrà presentato nel Paragrafo 4.6.2, infatti, queste due scale sono caratterizzate da un valore stimato del parametro di *feeling*  $\widehat{\xi}_D$  molto basso, che, in pratica, risulta pari a zero; la soluzione al problema di massimizzazione della funzione di verosimiglianza viene quindi individuata proprio lungo un estremo dello spazio parametrico. Quando i valori stimati dei parametri assumono questa posizione, spesso ci si trova in una situazione in cui, anziché individuare il massimo assoluto, l’algoritmo impiegato termina in corrispondenza di un massimo relativo della funzione di verosimiglianza (Manisera e Zuccolotto, 2017). Tuttavia, in genere l’algoritmo EM – che è stato impiegato per le stime delle due scale in questione – riesce a evitare di incorrere in questo genere di errore, a fronte della sua maggiore lentezza computazionale (Manisera e Zuccolotto, 2017). Infatti, anche nel caso delle scale “Ruvido-Morbido” e “Offuscato-Limpido” sembra che le stime ottenute applicando l’algoritmo EM, nonostante si trovino ai limiti dello spazio parametrico, possano rappresentare i valori in corrispondenza dei quali si trova il massimo assoluto della funzione di verosimiglianza.

Quando nel modello CUM il valore stimato di  $\widehat{\xi}_D$  corrisponde a 0, il modello dipende – oltre che da  $\hat{\pi}$  – dal valore assunto da un solo parametro di *feeling* ( $\widehat{\xi}_U$ ); inoltre, in questo caso, la misura del *feeling* neutrale ( $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ ) corrisponderà al complemento a 1 dell’unico parametro di *feeling* non nullo ( $1 - \widehat{\xi}_U$ ). Pertanto, in questa situazione, il modello CUM risulta molto simile al CUB, tranne per il fatto che quest’ultimo considera che il processo decisionale inizi in corrispondenza della prima alternativa di risposta della scala (cioè quella collocata più a sinistra), dalla quale ci si può eventualmente spostare verso destra, in caso di giudizi elementari positivi; il modello CUM, invece, ipotizza che la valutazione dei rispondenti prenda avvio dalla categoria centrale della scala. Salvo che per questa differenza, però, le stime dei parametri del modello CUM, quando il valore di  $\widehat{\xi}_D$  risulta 0, non dovrebbero essere molto diverse da quelle che si otterrebbero applicando il modello CUB e, di conseguenza, la funzione di massa di probabilità della variabile casuale associata ai due modelli dovrebbe risultare simile.



I due grafici sopra riportati rappresentano la funzione di massa di probabilità della v.c. associata al modello CUB, quando questo viene applicato alle risposte raccolte nella sala verde, relativamente alle due scale “Ruvido-Morbido” e “Offuscato-Limpido”. Confrontando questi grafici con quelli relativi alle due scale in questione presentati in Figura 4.15, si può notare che la forma della funzione di massa di probabilità risulta molto simile a quella relativa al modello CUB – che deriva da delle stime che, come verrà presentato nella Tabella 4.8, non si trovano agli estremi dello spazio parametrico. Questo potrebbe suggerire che le stime dei parametri del modello CUM ottenute per le due scale attraverso l’algoritmo EM siano quelle che consentono effettivamente di massimizzare la funzione di verosimiglianza.

#### 4.6.2. Valori stimati dei parametri del modello CUM per la sala verde

I valori stimati per i parametri del modello CUM relativi alle 12 scale a differenziale semantico oggetto di analisi sono presentati nella Tabella 4.8, insieme a quelli che risulterebbero dall'applicazione del modello CUB. Dato che il livello di adattamento del modello CUM ai dati osservati è elevato, si può ritenere che tali valori stimati rappresentino adeguatamente le componenti di *feeling* e di incertezza che hanno caratterizzato il processo di risposta alle 12 scale.

Tabella 4.8. – Valori stimati dei parametri del modello CUM relativi alla sala verde (tra parentesi si trovano i valori relativi agli *standard error*).

Fonte: Nostre elaborazioni, applicando il modello CUM alle risposte raccolte nella sala verde.

Item	MODELLO CUM					MODELLO CUB			
	$\hat{\pi}$	$1 - \hat{\pi}$	$\widehat{\xi}_D$	$\widehat{\xi}_U$	$1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$	$\hat{\pi}$	$1 - \hat{\pi}$	$\xi$	$1 - \xi$
Ruvido-Morbido	0,3275 (0,0538)	0,6725	<u>0,0000*</u> (0,0563)	0,7438 (0,0359)	0,2562 (0,0625)	0,3342 (0,0475)	0,6658	0,1338 (0,0202)	0,8662
Spigoloso-Tondeggiante	0,1886 (0,0634)	0,8114	<u>0,0025</u> (0,0767)	0,6969 (0,068)	0,3006 (0,0887)	0,2021 (0,0528)	0,7979	0,1672 (0,0388)	0,8328
Appiccicoso-Fluidido	0,6304 (0,0656)	0,3696	0,1303 (0,0258)	0,6492 (0,0283)	0,2205 (0,0311)	0,5174 (0,0581)	0,4826	0,2067 (0,0213)	0,7933
Soffocante-Fresco	0,5251 (0,08)	0,4749	0,1251 (0,0339)	0,6442 (0,0362)	0,2307 (0,0334)	0,3894 (0,0604)	0,6106	0,1805 (0,0299)	0,8195
Antico-Nuovo	0,3612 (0,0639)	0,6388	0,7120 (0,041)	<u>0,0485</u> (0,0401)	0,2395 (0,0471)	0,3401 (0,0525)	0,6599	0,8450 (0,0253)	0,1551
Fetido-Aromatico	0,7982 (0,0553)	0,2018	0,1386 (0,0242)	0,5852 (0,0232)	0,2762 (0,0343)	0,7076 (0,0533)	0,2924	0,2598 (0,0156)	0,7402
Amaro-Dolce	0,2679 (0,1048)	0,7321	0,4450 (0,0812)	0,2919 (0,086)	0,2631 (0,1234)	0,1876 (0,0705)	0,8124	0,5641 (0,067)	0,4359
Speziato-Fruttato	0,2675 (0,0691)	0,7325	0,6976 (0,0556)	<u>0,0300</u> (0,0585)	0,2724 (0,0584)	0,2662 (0,0531)	0,7338	0,8353 (0,0318)	0,1647
Inspido-Saporito	0,5631 (0,0652)	0,4369	0,1078 (0,0277)	0,6457 (0,0305)	0,2465 (0,0352)	0,4868 (0,058)	0,5132	0,2065 (0,0223)	0,7935
Glaciale-tropicale	0,2896 (0,0849)	0,7104	<u>0,1002</u> (0,0887)	0,2270 (0,0667)	0,6728 (0,1397)	0,3753 (0,0672)	0,6247	0,4486 (0,0322)	0,5514
Pallido-Frizzante	<u>0,1357</u> (0,0834)	0,8643	0,2147 (0,0997)	0,6653 (0,1264)	<u>0,1200</u> (0,1076)	<u>0,0882</u> (0,0587)	0,9118	0,2184 (0,1169)	0,7816
Offuscato-Limpido	0,1475 (0,0478)	0,8525	<u>0,0000**</u> (0,1242)	0,7982 (0,1063)	0,2018 (0,0755)	0,1379 (0,0411)	0,8622	0,0718 (0,0318)	0,9282

\* Per la scala "Glaciale-Tropicale"  $\widehat{\xi}_D = 5,06 \cdot 10^{-42}$

\*\* Per la scala "Offuscato-Limpido"  $\widehat{\xi}_D = 4,44 \cdot 10^{-139}$

Dalla Tabella 4.8. si può notare che, per il modello CUM, la misura di *feeling* verso la parte sinistra della scala ( $\widehat{\xi}_D$ ) assume valori molto prossimi allo 0 nel caso delle scale “Spigoloso-Tondeggiante” (per la quale  $\widehat{\xi}_D = 0,0025$ ), “Ruvido-Morbido” (con  $\widehat{\xi}_D = 5,06 \cdot 10^{-42}$ ) e “Offuscato-Limpido” (caratterizzata da un valore di  $\widehat{\xi}_D = 4,44 \cdot 10^{-139}$ ).<sup>81</sup> Queste tre scale sono caratterizzate dalla prevalenza di un *feeling* verso la parte destra della scala a differenziale semantico – così come avviene per “Appiccicoso-Fluidido”, “Soffocante-Fresco”, “Fetido-Aromatico”, “Insipido-Saporito” e “Pallido-Frizzante”. Invece, per le scale “Antico-Nuovo” e “Speziato-Fruttato”, tra i visitatori della sala verde prevale un *feeling* che orienta le risposte verso la parte sinistra della scala; lo stesso, anche se in modo meno marcato, si osserva anche per scala “Amaro-Dolce”. Infine, per la scala “Glaciale-Tropicale” il *feeling* prevalente è invece di tipo neutrale.

I valori riportati tra parentesi nella Tabella 4.8. rappresentano gli errori standard delle stime. Per metà delle scale oggetto di analisi, tutti i valori degli *standard error* risultano contenuti rispetto ai valori stimati dei parametri dei modelli CUM e CUB; questo indica che le stime possono ritenersi affidabili. Per le scale “Antico-Nuovo” e “Speziato-Fruttato”, invece, il valore dell’errore standard relativo a  $\widehat{\xi}_U$  non risulta trascurabile, così come avviene per “Glaciale-Tropicale”, relativamente alla stima di  $\widehat{\xi}_D$ . Nel modello CUB, l’unica scala per la quale si rileva uno *standard error* elevato rispetto al relativo valore stimato è quella individuata dagli aggettivi “Pallido-Frizzante”; ciò si verifica relativamente a  $\hat{\pi}$ , che presenta un errore standard rilevante anche nel caso del modello CUM (nel quale risulta elevato anche lo *standard error* di  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ ).

Quanto alle scale “Ruvido-Morbido”, “Spigoloso-Tondeggiante” e “Offuscato-Limpido”, è quasi inevitabile che i valori degli errori standard risultano significativamente più elevati delle stime del parametro  $\widehat{\xi}_D$ , in quanto queste sono molto prossime a 0.<sup>82</sup>

<sup>81</sup> Come anticipato in precedenza, quando nel modello CUM il valore del parametro  $\widehat{\xi}_D$  è pari a 0, il modello presenta molte caratteristiche in comune con il CUB: guardando al valore delle stime che si ottengono applicando i due modelli alle risposte raccolte nella scala verde relativamente alle scale “Ruvido-Morbido” e “Offuscato-Limpido” si può notare che le stime dei parametri di incertezza ( $1 - \hat{\pi}$ ) risultano praticamente uguali sia nel caso del CUM che del CUB. Il parametro  $\widehat{\xi}_U$ , invece, tende a risultare leggermente più basso rispetto al valore assunto dal parametro di *feeling* del modello CUB ( $1 - \widehat{\xi}$ ); ciò deriva anche dal fatto che quest’ultimo modello considera che il processo decisionale inizi dalla prima alternativa di risposta, dalla quale ci si sposta verso destra nel caso in cui venga formulato un giudizio elementare positivo. Nel modello CUM, invece, si ipotizza che il rispondente inizi a valutare dalla categoria centrale, scegliendo di spostarsi verso destra quando il giudizio elementare risulta positivo (e cioè con probabilità  $\widehat{\xi}_U$ ); lo spostamento verso sinistra avverrebbe nel caso di giudizi negativi, che però, in situazioni come quelle delle due scale in questione, si verificherebbero con una probabilità  $\widehat{\xi}_D = 0$ .

<sup>82</sup> Rapportando il valore stimato di  $\widehat{\xi}_D$  al relativo *standard error* per le scale “Spigoloso-Tondeggiante”, “Ruvido-Morbido” e “Offuscato-Limpido”, infatti, si ottengono dei valori molto contenuti, rispettivamente pari a 0,0326,  $8,99 \cdot 10^{-41}$  e  $3,57 \cdot 10^{-138}$ . I rapporti tra i valori stimati delle restanti due misure di *feeling* ( $\widehat{\xi}_U$  e  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ ) e i relativi errori standard risultano invece molto elevati; questo indica che le due stime possono ritenersi affidabili.

#### 4.6.3. Rappresentazione delle misure di *feeling* e di incertezza per la sala verde

Nella Figura 4.16. sono rappresentati i risultati dell'applicazione del modello CUM alle risposte raccolte nella sala verde; i punti rappresentati in verde, corrispondenti alle 12 scale a differenziale semantico oggetto di indagine, presentano una dimensione data dal valore stimato della misura di incertezza, mentre le loro coordinate sono date dalle tre misure di *feeling* del modello CUM. I punti rappresentati in grigio, invece, si riferiscono ai risultati ottenuti analizzando tutte le 1024 risposte raccolte nelle tre sale della Pinacoteca.

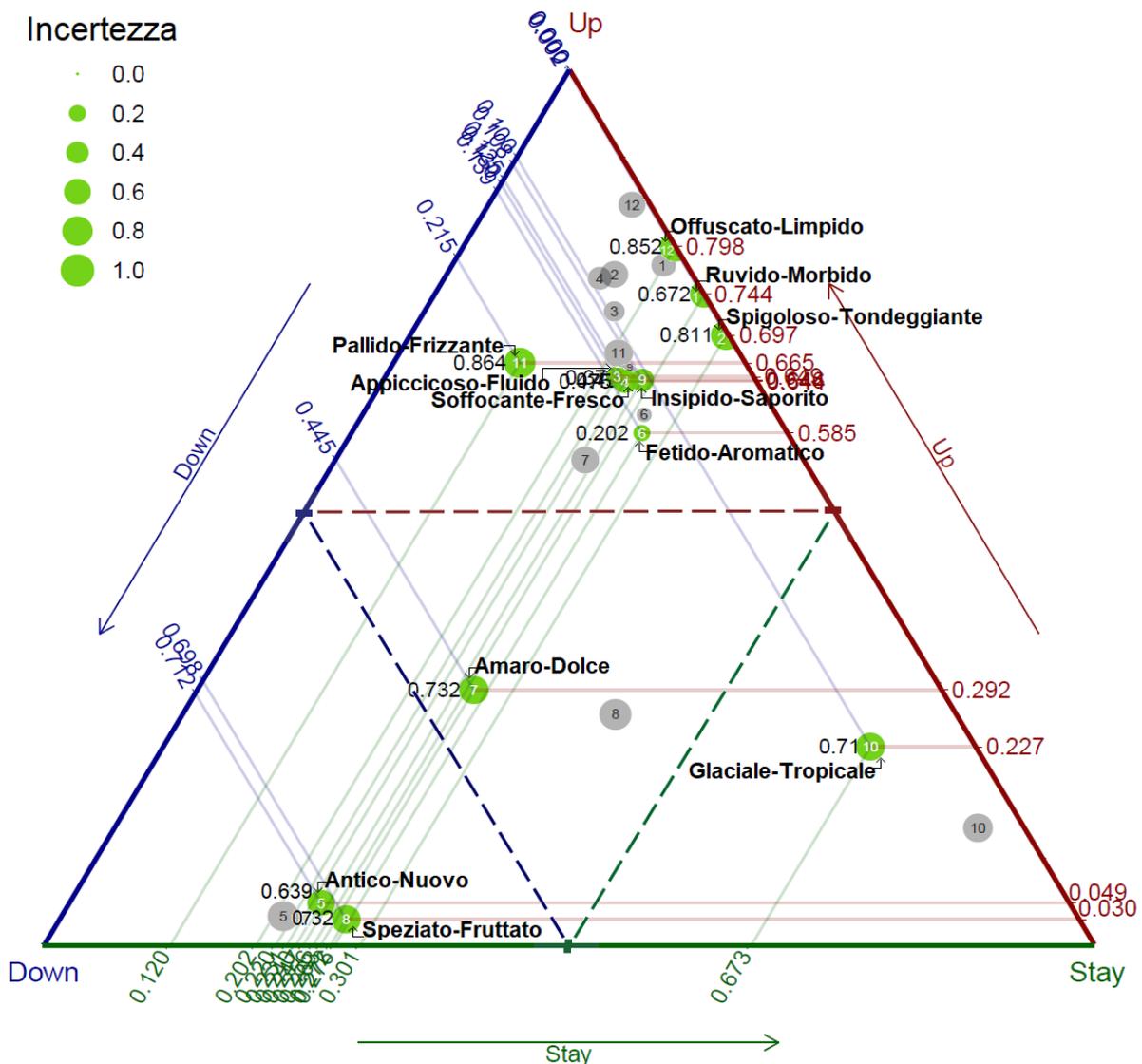


Figura 4.16. – Rappresentazione grafica (su un unico *ternary plot*) dei valori stimati dal modello CUM per le 12 scale a differenziale semantico relative alla sala verde.

Fonte: Nostre elaborazioni sul *ternary plot* risultante dall'applicazione del modello CUM.

Come avviene per la sala azzurra e la sala rossa (e analogamente al caso dei 1024 rispondenti), la maggior parte dei punti è posizionata nell'area superiore del *ternary plot*, in quanto, per molte

scale a differenziale semantico, il *feeling* che prevale tra i visitatori tende a orientare le risposte verso l'aggettivo posizionato sull'estremo di destra. Per alcune di queste scale (“Insidio-Saporito” e “Fetido-Aromatico”), i risultati ottenuti nella sala verde risultano molto simili a quelli del caso di tutti i 1024 rispondenti. I risultati non si discostano molto anche relativamente alle scale “Ruvido-Morbido”, “Appiccicoso-Fluido”, “Offuscato-Limpido” e “Pallido-Frizzante”, almeno per la componente di *feeling*; l'incertezza, invece, tende a essere più elevata nel caso della sala verde. Anche le scale “Spigoloso-Tondeggiante” e “Soffocante-Fresco” sono posizionate nell'area superiore del grafico; tuttavia, rispetto al caso dei 1024 rispondenti, esse presentano un livello meno elevato di *feeling* verso la parte destra delle scale (che risulta comunque quello prevalente), perché cresce anche il *feeling* verso l'alternativa di risposta centrale. Nella Figura 4.16, infatti, i punti corrispondenti a queste due scale, pur restando nell'area superiore del *ternary plot*, occupano una posizione più spostata verso destra e verso il basso, in direzione dell'area inferiore destra che denota neutralità.

La scala “Amaro-Dolce”, invece, anziché trovarsi nella parte superiore della rappresentazione grafica, come avviene nel caso dell'analisi di tutte le 1024 risposte, nella sala verde risulta collocata nell'area centrale del *ternary plot*. Questa scala, infatti, è caratterizzata da una leggera prevalenza del *feeling* verso la parte sinistra della scala, anche se il valore di  $\widehat{\xi}_D$  non si discosta molto dalle stime ottenute per  $\widehat{\xi}_U$  e per  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ .

Un altro cambiamento che si riscontra nella sala verde, rispetto al caso dei 1024 rispondenti, è lo spostamento del punto relativo alla scala “Speziato-Fruttato” dall'area centrale del *ternary plot* all'area inferiore sinistra, caratterizzata da una prevalenza di un *feeling* verso la parte sinistra della scala. Nella medesima area è collocata anche la scala “Antico-Nuovo”, che presenta risultati simili a quelli ottenuti analizzando tutte le 1024 risposte.

Infine, la scala “Glaciale-Tropicale” è posizionata nell'area inferiore destra del *ternary plot*, in quanto il *feeling* prevalente orienta le risposte verso la categoria centrale, anche se, rispetto al caso dei 1024 rispondenti, il valore di  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$  risulta più contenuto (restando comunque superiore a 0,5), mentre le misure di *feeling* verso la parte destra e sinistra della scala risultano leggermente più elevate.

Complessivamente, quindi, i visitatori della sala verde tendono a manifestare delle percezioni tattili legate a qualcosa di “morbido”, “tondeggiante” e “fluida”; le sensazioni legate all'olfatto

rimandano a un odore “fresco”, “aromatico” e al contempo “antico”. Le percezioni gustative sono riferite principalmente a gusti “dolci”, “speziati” che rimandano a qualcosa di “saporito”; le sensazioni visive, infine, riguardano qualcosa che non è né “glaciale” né “tropicale”, e che si definirebbe “frizzante” e “limpido”.

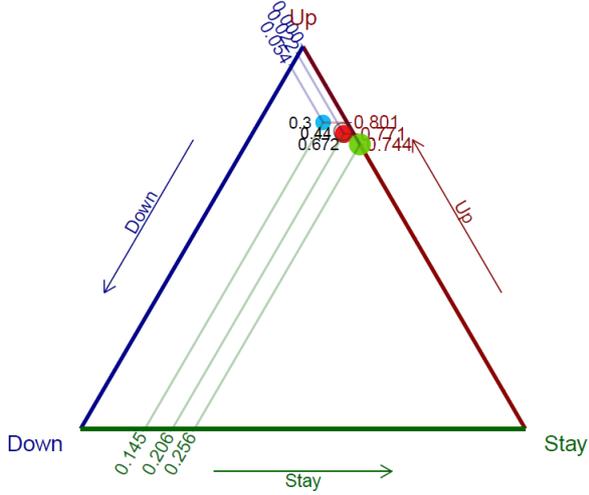
#### **4.7. Confronto delle percezioni sensoriali relative alle tre sale (azzurra, rossa e verde)**

Una volta applicato il modello CUM alle risposte raccolte nelle tre sale oggetto dell’indagine sensoriale che è stata condotta presso la Pinacoteca, è possibile confrontare i risultati ottenuti per ognuna di esse in merito alle componenti di incertezza e di *feeling* del processo decisionale.

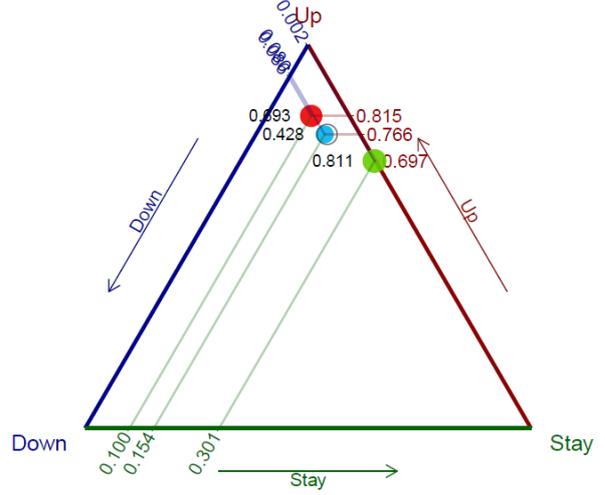
Da questo confronto è possibile capire se il colore delle pareti della stanza abbia un impatto sulle percezioni suscitate nei visitatori. Infatti, le sale numero III (azzurra), VI (rossa) e X (verde) sono accomunate dal fatto di ospitare opere risalenti al XVI secolo, caratterizzate da somiglianze nei toni e nello stile; inoltre, le tre sale presentano una dimensione e una struttura architettonica simile. Pertanto, qualora si riscontrassero rilevanti differenze nelle percezioni dei visitatori delle diverse sale, tali differenze potrebbero essere determinate, in una certa misura, dal colore delle pareti delle stanze.

Il modo più immediato per confrontare i risultati del modello CUM applicato alle tre sale è quello di avvalersi delle rappresentazioni grafiche delle misure di *feeling* e di incertezza, che sono espresse rispettivamente dalle coordinate e dalla dimensione dei punti associati alle diverse scale a differenziale semantico. Per ogni scala dovrebbero quindi essere rappresentati tre punti, corrispondenti ai risultati ottenuti nelle tre sale; tuttavia, visto che l’indagine sensoriale si fonda su 12 scale a differenziale semantico, utilizzare un singolo *ternary plot* per rappresentare un così elevato numero di punti risulterebbe poco chiaro. Quindi, può essere più efficace utilizzare, per ognuna delle scale, un grafico diverso, sul quale collocare i tre punti corrispondenti ai risultati ottenuti nella sala azzurra, rossa e verde, come avviene nei grafici riportati in Figura 4.17. In questo modo, è anche possibile rappresentare sullo stesso grafico il punto corrispondente alla “percezione media” di tutti i 1024 rispondenti intervistati nelle tre sale (il punto in nero nella Figura 4.17), in modo che sia possibile confrontare in maniera immediata i risultati ottenuti nelle singole sale con il caso medio, analogamente a quanto è stato fatto nei Paragrafi precedenti.

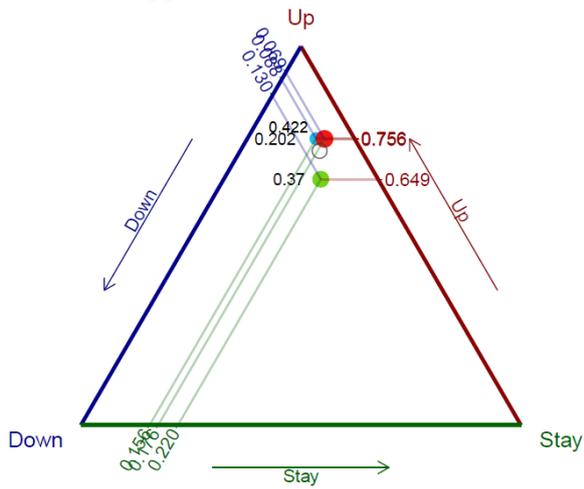
Ruvido – Morbido



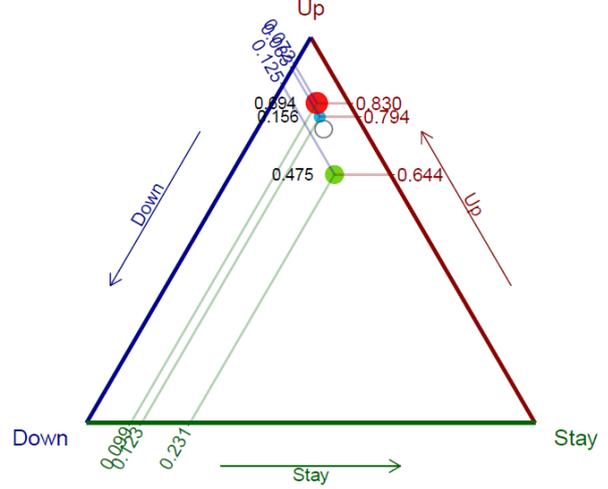
Spigoloso – Tondeggiante



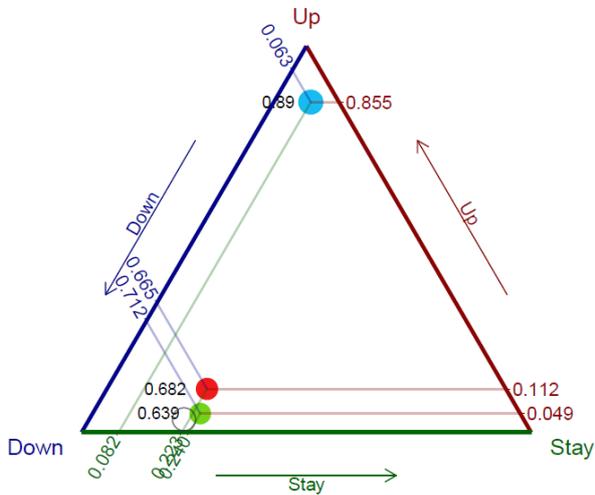
Appiccicoso – Fluido



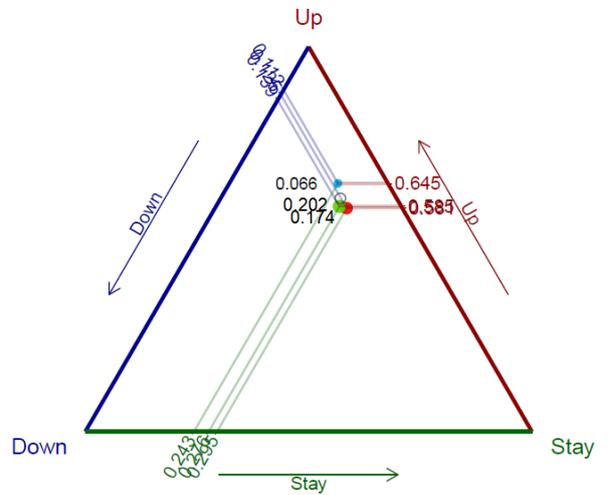
Soffocante – Fresco



Antico – Nuovo



Fetido – Aromatico



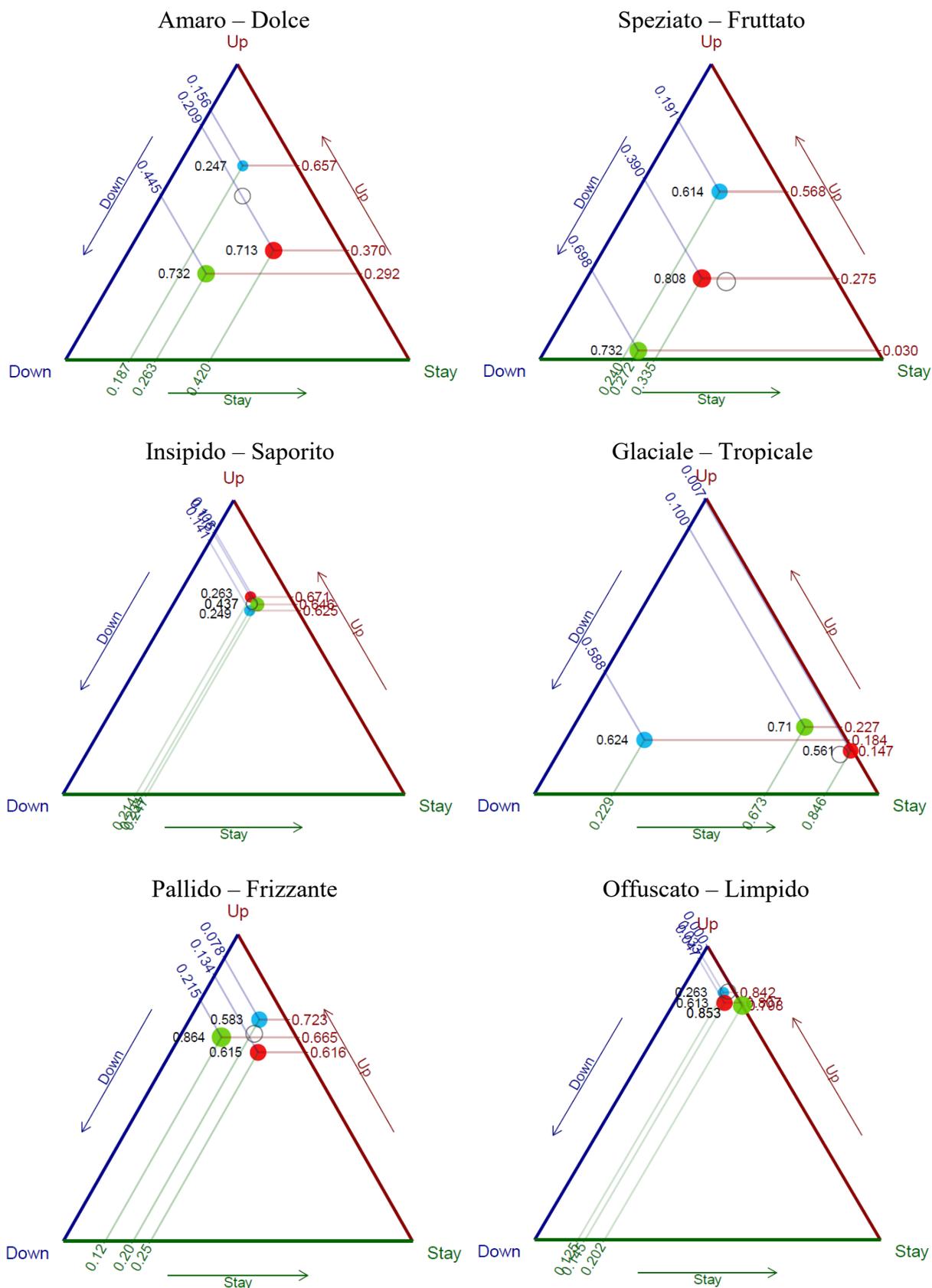


Figura 4.17. – Rappresentazione grafica dei risultati ottenuti nella sala azzurra, rossa e verde (e nel caso delle 1024 risposte) applicando il modello CUM.  
 Fonte: Nostre elaborazioni, applicando il modello CUM ai dati raccolti nelle tre sale della Pinacoteca.

#### 4.7.1 Risultati dell'analisi delle percezioni tattili

Relativamente alle percezioni legate al tatto, dalla Figura 4.17. è possibile notare che i risultati ottenuti nelle tre stanze risultano molto simili tra loro.

In particolare, i punti che si riferiscono alla sala azzurra e a quella rossa si trovano molto vicini tra loro, mentre il punto relativo alla sala verde tende a essere leggermente più distante e risulta collocato poco più in basso nel grafico. Per le tre scale a differenziale semantico relative alle percezioni tattili, i punti che rappresentano le tre sale si trovano tutti nell'area superiore del *ternary plot*, in quanto in tutti i casi si osserva un *feeling* che tende a orientare la maggior parte delle risposte verso la parte destra della scala; nel caso della sala verde, questo *feeling* risulta leggermente meno forte. Per esempio, per la scala "Spigoloso-Tondeggiante", dalla Figura 4.17. si può vedere che, in tutte le sale, la componente di *feeling* tende a orientare le risposte verso il secondo aggettivo; nel caso della sala rossa e di quella azzurra, però, si osserva una maggiore tendenza a scegliere le ultime alternative di risposta, poste in prossimità dell'aggettivo "tondeggiante". Lo stesso avviene per le scale "Ruvido-Morbido" e "Appiccicoso-Fluidi": nella sala verde vengono scelte le alternative di risposta che, pur trovandosi nella parte destra della scala, non sono così vicine all'aggettivo posto sul suo estremo destro, rispetto a quanto avviene nella sala azzurra e in quella rossa.

Dalle analisi condotte sembrerebbe quindi che, pur non modificando la convinzione secondo cui è l'aggettivo posto sul polo destro della scala a descrivere meglio la propria percezione, il colore verde tenda a ridurre l'intensità di tale convinzione.

Dal confronto dei risultati relativi alle percezioni tattili emerge anche che, nel caso della sala azzurra, la componente di incertezza tende a risultare più contenuta. La quota dei visitatori che manifestano delle sensazioni che descriverebbero impiegando gli aggettivi posizionati sull'estremo destro delle tre scale a differenziale semantico, infatti, risulta più elevata nella sala azzurra rispetto alle altre due sale. Sembrerebbe quindi che l'azzurro tenda ad aumentare il numero di persone che associano alla visita della sala delle sensazioni relative a qualcosa di "morbido", "tondeggiante" e "fluidi".

Nel complesso, tuttavia, il colore delle pareti delle sale non sembra impattare in modo molto marcato sulle percezioni tattili dei visitatori, dato che, per le tre scale a differenziale semantico in questione, non si riscontrano differenze rilevanti nelle tre sale per quanto riguarda i risultati relativi alle componenti di *feeling* e di incertezza del processo decisionale.

#### 4.7.2. Risultati dell'analisi delle percezioni olfattive

Per quanto riguarda le percezioni sensoriali legate all'olfatto, dalla Figura 4.17. è possibile notare che, per la scala “Soffocante-Fresco”, valgono le medesime considerazioni appena riportate per le sensazioni tattili. Le tre sale, infatti, non presentano risultati troppo diversi, anche se l'incertezza, nel caso della sala azzurra, risulta molto più contenuta rispetto alle altre e il *feeling* verso la parte destra della scala, nel caso della sala verde, risulta leggermente più basso.

È inoltre possibile osservare che il diverso colore delle sale non genera differenze apprezzabili nelle risposte alla scala “Fetido-Aromatico”. In tutte le tre stanze oggetto d'indagine, infatti, si riscontrano percezioni analoghe; è per questo motivo che, dall'analisi complessiva di tutte le 1024 risposte, emerge una percezione “media” caratterizzata da un'incertezza molto contenuta (come avviene anche nel caso delle singole sale). Infatti, una quota molto elevata dei visitatori delle tre sale presenta un *feeling* medio-alto verso la parte destra della scala a differenziale semantico.

Alcune differenze rilevanti si osservano nel caso della scala “Antico-Nuovo”, nella quale il *feeling* prevalente nella stanza rossa e in quella verde orienta le risposte verso la parte sinistra della scala, mentre, nel caso della sala azzurra, si osserva un elevato *feeling* verso la sua parte destra.

In realtà, il fatto che dalla Figura 4.17. i risultati ottenuti nella sala azzurra appaiano molto diversi da quelli delle altre due sale – e anche da quelli sintetizzati dalla “percezione media” di tutti i 1024 visitatori<sup>83</sup> – si deve al livello di incertezza che, nella sala azzurra, risulta molto elevato. Le risposte che la riguardano, infatti, tendono a distribuirsi tra tutte le categorie della scala, con una leggera prevalenza di quelle in corrispondenza delle ultime alternative di risposta. Pertanto, è da considerare che il livello molto elevato di *feeling* verso la parte destra della scala “Antico-Nuovo” riguarda una quota piuttosto contenuta dei rispondenti.<sup>84</sup>

In ogni caso, il colore azzurro suscita in questi visitatori delle sensazioni che loro associano in modo marcato a un odore di nuovo, a differenza di quanto avviene nella sala rossa e verde, dove la percezione olfattiva è associata a qualcosa di antico.

---

<sup>83</sup> Per maggiori chiarimenti sul confronto tra la percezione “media” e quella delle tre sale si rimanda all'Appendice 1.

<sup>84</sup> Il parametro di incertezza ( $1 - \hat{\pi}$ ), infatti, nella funzione di massa di probabilità associata al modello CUM esprime il peso della v.c. Uniforme discreta, associata alla scelta casuale (e cioè all'incertezza massima); il suo complemento a 1, quindi, indica la quota di rispondenti che scelgono sulla base del loro *feeling* verso l'aspetto indagato.

### 4.7.3. Risultati dell'analisi delle percezioni gustative

Per quanto riguarda le percezioni sensoriali legate al gusto, dalla Figura 4.17. emerge che, per la scala “Insidido-Saporito”, le percezioni dichiarate dai rispondenti risultano molto simili, indipendentemente dal colore della sala. Le rimanenti due scale relative alle percezioni gustative, invece, presentano delle differenze significative nelle diverse sale analizzate.

Relativamente alla scala “Amaro-Dolce”, si può notare che nella sala azzurra prevale un *feeling* medio-alto verso la parte destra della scala; inoltre, l'incertezza in questo caso risulta molto contenuta, indicando che una quota elevata dei visitatori associa alla visita della sala azzurra un sapore abbastanza dolce. Nelle altre due sale, analizzando le risposte alla scala “Amaro-Dolce” emergono dei risultati diversi. Anzitutto, il livello di incertezza in questi due casi risulta medio-alto; inoltre, nella sala rossa si osserva una leggera prevalenza di un *feeling* neutrale, mentre in quella verde, seppure in modo non molto marcato, tende a prevalere il *feeling* verso la parte sinistra della scala, e cioè verso l'aggettivo “amaro”.

Il colore azzurro, quindi, sembra suscitare in un numero molto elevato di visitatori una sensazione di qualcosa di dolce, mentre il verde sembrerebbe essere associato più a un gusto amaro e il rosso porterebbe ad associare un gusto né dolce né amaro.

Anche per quanto riguarda la scala “Speziato-Fruzzato”, i risultati ottenuti nella sala rossa risultano in un certo senso intermedi rispetto a quelli relativi alla sala azzurra e a quella verde, soprattutto per quanto riguarda la componente di *feeling*; l'incertezza, invece, risulta medio-alta in tutti i casi, soprattutto nella sala rossa. Nella sala azzurra, si riscontra la prevalenza di un *feeling* medio-alto verso l'aggettivo “fruzzato”, mentre la sala verde è caratterizzata da un *feeling* piuttosto elevato rispetto all'aggettivo “speziato”. La sala rossa presenta una leggera prevalenza del *feeling* verso la parte sinistra della scala, ma anche il *feeling* neutrale non è trascurabile e, a sua volta, esso risulta di poco superiore a quello verso la parte destra della scala. La sala rossa è quindi caratterizzata da una situazione intermedia – che risulta molto simile alla percezione “media” di tutti i 1024 visitatori.

Pertanto, il colore azzurro sembra essere associato a un gusto abbastanza fruzzato, mentre sembra che il colore verde generi delle percezioni gustative più legate a qualcosa di speziato; il colore rosso, invece, pur risultando più associato a un gusto speziato, sembra non dare luogo a dei risultati così netti come quelli che si osservano per gli altri due colori.

#### 4.7.4. Risultati dell'analisi delle percezioni visive

Gli ultimi tre grafici in Figura 4.17. riguardano le scale a differenziale semantico impiegate per l'analisi delle percezioni relative alla vista.

La scala "Offuscato-Limpido", riguardo alla componente di *feeling*, presenta dei risultati molto simili nelle tre sale: tra i loro visitatori prevale un *feeling* molto elevato verso la parte destra della scala. Quanto alla componente di incertezza, invece, essa risulta contenuta nel caso della sala azzurra, mentre è medio-alta nella sala rossa ed elevata in quella verde. Questo significa che l'azzurro tende a suscitare in un elevato numero di visitatori una sensazione legata a qualcosa di limpido; la stessa percezione si genera nella sala rossa, ma per una quota più ridotta di rispondenti, e, per ancora meno persone, anche nella sala verde, visto il livello elevato di incertezza, che porta molti a scegliere in modo casuale, facendo così distribuire le risposte tra tutte le categorie della scala.

Relativamente alla scala "Pallido-Frizzante", nelle tre sale si riscontra la prevalenza di un *feeling* medio-alto verso la parte destra della scala e si osserva un livello medio-alto di incertezza, che risulta particolarmente elevata nel caso della sala verde. Quest'ultima, pur presentando una prevalenza di risposte orientate verso l'aggettivo "frizzante", è caratterizzata da un moderato *feeling* anche verso l'aggettivo "pallido" (posto sul polo sinistro della scala), mentre il *feeling* neutrale risulta piuttosto contenuto. La sala azzurra è quella che presenta il livello più elevato di *feeling* verso la parte destra della scala, che risulta leggermente superiore a quello che caratterizza la sala verde e quella rossa. Tutte le tre sale oggetto di indagine, quindi, sono caratterizzate da una prevalenza di percezioni visive associate a qualcosa di frizzante, ma il colore azzurro sembra rendere leggermente più marcata questa tendenza. Nel caso del colore rosso, invece, il *feeling* verso l'aggettivo "frizzante" risulta leggermente più contenuto, perché si assiste a una tendenza più marcata verso un atteggiamento neutrale. Il colore verde, invece, porta a una riduzione del *feeling* verso il termine "frizzante", dovuta al fatto che alcune persone lo associano alla percezione di qualcosa di pallido.

Per quanto riguarda la scala "Glaciale-Tropicale", la Figura 4.17. mostra che nella sala azzurra prevale un *feeling* medio-alto verso la parte sinistra della scala, cioè verso l'aggettivo "glaciale", mentre la sala rossa e quella verde presentano un *feeling* neutrale. In particolare, nella sala rossa si riscontra un forte atteggiamento di neutralità dei visitatori; molti di loro,

infatti, sono fortemente convinti che la propria percezione visiva non sia associata né a qualcosa di glaciale né di tropicale. La sala verde è caratterizzata dalla prevalenza di un *feeling* neutrale medio-alto: molti visitatori dichiarano una sensazione che non è né glaciale né tropicale, ma il *feeling* verso la parte destra della scala non è del tutto trascurabile e risulta leggermente più elevato rispetto alla sala rossa.

Il colore azzurro, quindi, sembra portare buona parte dei rispondenti a scegliere le alternative di risposta in corrispondenza dell'aggettivo "glaciale", mentre il colore rosso porta a un *feeling* fortemente neutrale, che orienta molte risposte verso la categoria centrale della scala. Una situazione simile, ma con un *feeling* neutrale leggermente meno elevato, si riscontra anche con il colore verde.

#### **4.7.5. L'effetto dei colori sulle percezioni sensoriali dei visitatori**

Sulla base delle considerazioni appena effettuate confrontando i risultati dell'applicazione del modello CUM nelle tre sale della Pinacoteca Tosio-Martinengo di Brescia, è possibile trarre alcune conclusioni in merito all'impatto dei colori delle pareti delle sale nel determinare le percezioni sensoriali dei visitatori.

Si può ritenere che un certo colore abbia un ruolo nell'influenzare le sensazioni delle persone quando, nella sala caratterizzata da quel colore, si riscontrano delle percezioni che si discostano in modo apprezzabile da quelle rilevate nelle altre sale. Questo, in particolare, si riscontra per le scale a differenziale semantico individuate dalle coppie di aggettivi "Antico-Nuovo", "Amaro-Dolce", "Speziato-Fruttato" e "Glaciale-Tropicale".

Relativamente al colore azzurro, sembra emergere che esso generi delle sensazioni che riguardano un odore di nuovo, un gusto dolce e fruttato, e un'immagine di qualcosa di glaciale.<sup>85</sup>

Relativamente al colore verde, invece, sembrerebbe che i rispondenti lo associno principalmente a un odore antico, a un gusto speziato e più amaro che dolce; quanto alla vista, il verde rievoca un'immagine di qualcosa che non si definirebbe né glaciale né tropicale.<sup>86</sup>

---

<sup>85</sup> Dall'analisi condotta nella sala azzurra, infatti, si è rilevato che una quota moderata dei visitatori era fortemente convinta di associare alla visita un odore di nuovo, mentre molti rispondenti dichiaravano di provare una sensazione di un gusto abbastanza dolce; inoltre, buona parte dei visitatori riteneva di provare un gusto abbastanza fruttato e di associare alla visita della sala un'immagine relativa a qualcosa di glaciale.

<sup>86</sup> In particolare, analizzando le risposte raccolte nella sala verde è emerso che buona parte dei visitatori associava alla visita un odore di qualcosa di abbastanza antico e un gusto più amaro che dolce e, al contempo, speziato; inoltre, una discreta percentuale di persone associava alla visita l'immagine di qualcosa che non era né glaciale né tropicale.

Infine, sembra che il colore rosso determini delle percezioni relative a un odore antico, a un gusto che non è né amaro né dolce e che risulta leggermente più speziato che fruttato; rispetto alla vista, invece, la sensazione associata risulta fortemente neutrale tra gli aggettivi “glaciale” e “tropicale”.<sup>87</sup>

---

<sup>87</sup> Dall’analisi condotta nella sala rossa, infatti, si è riscontrato che buona parte dei rispondenti associava alla visita un odore di qualcosa di abbastanza antico e un gusto né amaro né dolce; inoltre, una discreta percentuale di soggetti dichiarava di provare un gusto leggermente più speziato che fruttato e, infine, diversi visitatori erano molto convinti che alla visita della sala avrebbero associato un’immagine di qualcosa che non era né glaciale né tropicale.

## CONSIDERAZIONI FINALI

Nei Capitoli precedenti è stato spiegato che, quando ci si avvale di scale a differenziale semantico per indagare un fenomeno di interesse, le risposte raccolte danno luogo a variabili qualitative ordinali, in quanto, anche qualora le alternative di risposta delle scale fossero individuate da numeri, esse non godono di proprietà metriche e quindi non possono essere considerate come dei dati quantitativi. Per questo motivo, l'analisi delle risposte raccolte attraverso tali scale deve essere effettuata sulla base di un metodo statistico che consideri la loro natura di scale di misurazione ordinali.

Il metodo di analisi delle scale a differenziale semantico presentato in questo elaborato è il modello CUM, il cui nome deriva dal fatto che esso si ottiene dalla combinazione di due variabili casuali, una Uniforme discreta e una Multinomiale linearmente trasformata. Questo modello – basandosi su una formulazione matematica equivalente a quella introdotta per la classe dei modelli di analisi delle scale ordinali denominata CUB – consente di ottenere informazioni sulle due componenti latenti che si può ritenere caratterizzino il processo decisionale dei rispondenti. Nella scelta dell'alternativa di risposta di una scala ordinale e, nello specifico, di una scala a differenziale semantico, si può infatti ritenere che intervenga una componente di *feeling* – corrispondente a una valutazione attenta e ponderata delle proprie convinzioni in merito all'aspetto che viene chiesto di valutare – e una componente di incertezza – che, quando è massima, porta a rispondere in modo casuale.

Rispetto ai modelli CUB, il CUM è stato sviluppato appositamente per l'analisi delle scale a differenziale semantico, per le quali si può ritenere che il processo di risposta inizi dalla categoria centrale della scala, dalla quale si deciderà se e di quanto spostarsi verso uno dei due estremi, in corrispondenza dei quali sono posizionati due termini di significato opposto. Pertanto, dall'analisi condotta mediante il modello CUM può risultare che tra i rispondenti prevalga un *feeling* che tende a orientare le risposte verso le alternative poste nella parte sinistra della scala, può accadere che risulti prevalente il *feeling* verso la parte destra della scala, o si può riscontrare una preferenza verso l'alternativa di risposta centrale, nel caso in cui prevalga un atteggiamento di neutralità tra i due termini posizionati ai poli della scala.

Le informazioni sulle componenti di *feeling* e di incertezza relative a ciascuna scala si ottengono sulla base delle stime di massima verosimiglianza dei parametri del modello CUM; tali stime possono essere rappresentate graficamente avvalendosi di un *ternary plot*. In particolare, quando per analizzare un certo fenomeno vengono impiegate più scale diverse, come nel caso di studio riportato nel Capitolo 4, questa rappresentazione consente di confrontare in modo immediato i risultati ottenuti per ciascuna scala.

Nell'ultimo Capitolo di questo elaborato è stata illustrata l'applicazione del modello CUM a un'indagine sensoriale svolta, utilizzando una batteria di scale a differenziale semantico, presso la Pinacoteca Tosio-Martinengo di Brescia. Lo scopo di tale analisi era quello di indagare le percezioni sensoriali dei visitatori di tre sale della Pinacoteca, anche al fine di valutare se esse fossero determinate in qualche misura dal diverso colore delle pareti che caratterizza le diverse sale del museo. Infatti, un'interessante applicazione delle scale a differenziale semantico consiste nello studio della sinestesia, ossia del fenomeno dell'interazione tra sensi diversi, che si verifica quando nelle persone, a seguito di un certo stimolo sensoriale, si generano delle percezioni attinenti agli altri sensi. Dall'analisi condotta mediante il modello CUM è emerso che il colore delle tre sale sembra aver determinato delle differenze nelle percezioni relative al gusto (per le scale "Amaro-Dolce" e "Speziato-Fruttato"), all'olfatto (relativamente ad "Antico-Nuovo") e alla vista (per quanto riguarda "Glaciale-Tropicale"). Dall'indagine sensoriale sembra emergere che qualora si volesse suscitare nelle persone una sensazione associata a qualcosa di nuovo, di dolce e legata a un'immagine glaciale, si potrebbe pensare di impiegare il colore azzurro. Se invece si desiderasse rievocare un gusto amaro o speziato, potrebbe rivelarsi più opportuno l'utilizzo del colore verde, che potrebbe anche portare ad associare un odore di qualcosa di antico.

Nel Capitolo è stato anche illustrato come valutare l'affidabilità delle stime dei parametri del modello CUM, confrontando il valore degli *standard error* con i relativi valori stimati a cui essi fanno riferimento. Gli errori standard corrispondono alla deviazione standard dello stimatore utilizzato per ottenere la stima del parametro di interesse; quando essi risultano contenuti rispetto alle stime, significa che la variabilità dello stimatore attorno al suo valore atteso è ridotta; dato che il valore atteso dello stimatore tende al valore del parametro che si desidera stimare, in questi casi le stime ottenute potranno essere considerate affidabili.

Dall'applicazione del modello CUM al caso della Pinacoteca, è stato anche possibile riscontrare la sua buona capacità di adattarsi alle risposte osservate, grazie all'elevata flessibilità della variabile casuale a esso associata, dovuta alla presenza di due parametri di *feeling*, oltre a quello di incertezza. Nella quasi totalità dei casi, il valore dell'indice di dissimilarità – misura della bontà della rappresentazione fornita dal modello – assume valori inferiori a 0,10, indicando che, per ottenere un adattamento perfetto, sarebbe sufficiente modificare il 10% delle risposte. Ciò significa che la variabile casuale associata al modello CUM è in grado di adattarsi in modo soddisfacente alle risposte osservate; pertanto, le stime dei parametri che sono state ottenute forniscono informazioni sufficientemente precise sulle componenti di incertezza e di *feeling* del processo decisionale.

Si è inoltre potuto osservare che i valori più elevati dell'indice di dissimilarità sono stati riscontrati in corrispondenza di quelle scale la cui distribuzione di frequenze delle risposte era caratterizzata da due alternative di risposta più frequenti rispetto alle altre, una collocata nella parte destra della scala, e una in corrispondenza della categoria centrale. Il modello CUM, solitamente, consente di ottenere un buon livello di adattamento anche nel caso di distribuzioni bimodali, quando, però, le due alternative più frequenti si trovano una nella parte destra della scala e una in quella sinistra. Quando le maggiori frequenze si riscontrano in corrispondenza dell'alternativa di risposta centrale e di un'altra categoria della scala, il modello non riesce ad adattarsi in modo eccellente ai dati osservati, come è emerso, per alcune scale, nell'indagine sensoriale svolta presso la Pinacoteca di Brescia.

Dall'analisi è inoltre emerso che, nella quasi totalità dei casi, applicando il modello CUM si è ottenuto un livello di adattamento superiore a quello che si riscontrerebbe impiegando il modello CUB. Questo è giustificato dalla presenza, nel modello CUM, di un ulteriore parametro, che gli conferisce maggiore flessibilità, consentendogli di adattarsi a molte tipologie di distribuzioni di frequenze. Tuttavia, la presenza di un parametro in più aumenta la complessità del modello, anche dal punto di vista dello sforzo computazionale richiesto per ottenere le stime dei suoi parametri. Introducendo gli *information criteria* AIC e BIC è stato possibile confrontare i due modelli CUM e CUB, tenendo conto sia del livello di adattamento ai dati osservati, sia della complessità derivante dal numero dei parametri da stimare. Nella maggior parte dei casi, la più elevata complessità del modello CUM è risultata giustificata dal

miglioramento considerevole nella bontà della rappresentazione dei dati osservati. In alcuni casi, tuttavia, dall'indice BIC – più penalizzante per il modello CUM – e talvolta anche dall'AIC, il modello CUB è risultato preferibile, in quanto la maggiore complessità del CUM non era giustificata dal limitato miglioramento del livello di adattamento.

Va anche considerato che, rispetto al CUB, il modello CUM – essendo specificamente pensato per le scale a differenziale semantico – consente di fornire informazioni molto più analitiche in merito alla componente di *feeling*, dettagliando quale sia l'atteggiamento dei rispondenti verso le categorie poste nella parte sinistra della scala, verso quelle che si trovano a destra, e verso l'alternativa di risposta centrale. Ad esempio, per alcune scale a differenziale semantico del questionario di analisi sensoriale, il modello CUM ha portato a dei risultati molto diversi da quelli che si sarebbero ottenuti applicando il modello CUB. Impiegando quest'ultimo metodo di analisi, infatti, alcune scale risulterebbero caratterizzate da un *feeling* molto simile (di livello intermedio, considerati i valori di  $1 - \hat{\xi}$  prossimi a 0,5). Analizzando le medesime scale con il CUM, invece, per alcune si è riscontrata una forte prevalenza di un atteggiamento neutrale tra i due termini posti agli estremi della scala (segnalato da elevati valori della misura di *feeling* neutrale  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ ), mentre per altre scale, sono stati rilevati dei valori moderati, e molto simili tra loro, di tutte le tre misure di *feeling*  $\widehat{\xi}_D$ ,  $\widehat{\xi}_U$  e  $1 - \widehat{\xi}_D - \widehat{\xi}_U$ . L'impiego del modello CUM permette quindi di distinguere in modo netto le situazioni caratterizzate da un forte *feeling* neutrale da quelle che presentano un *feeling* moderato sia verso la parte destra della scala, sia verso quella sinistra, sia verso l'alternativa di risposta centrale. Quanto appena illustrato porta a prediligere l'utilizzo del modello CUM per l'analisi delle scale a differenziale semantico.

Una ragione che potrebbe invece portare a preferire l'impiego del modello CUB è data dal fatto che tale metodo, grazie all'utilizzo delle *covariate*, consente di stimare diversi parametri di *feeling* e di incertezza per gruppi diversi di rispondenti, che presentano un certo valore della variabile che si è deciso di impiegare come *covariata* per tale componente del processo decisionale. Nel caso dell'indagine sensoriale svolta presso la Pinacoteca di Brescia, per esempio, una *covariata* di interesse – sia per la componente di incertezza, sia per quella di *feeling* – è rappresentata dalla variabile che indica in quale delle tre sale (azzurra, rossa e verde) sono stati intervistati i visitatori. Se l'analisi fosse stata svolta attraverso il modello CUB, sarebbe stato sufficiente indicare tale variabile come *covariata* per ottenere in modo immediato

le stime dei parametri di *feeling* e di incertezza per ognuna delle tre sale. Impiegando il modello CUM, invece, per ottenere i risultati relativi alle singole sale è stato necessario filtrare il dataset delle risposte, estrapolando soltanto quelle relative alla sala azzurra, poi alla sala rossa e infine alla sala verde, per poi fornire in input al modello la matrice dei dati relativa alla singola stanza. Il modello CUM è stato sviluppato molto recentemente e, per questo, la possibilità di includere delle *covariate* non è ancora stata implementata.

Un aspetto che invece accomuna i modelli CUM e CUB è rappresentato dal fatto che nessuno dei due metodi consente di effettuare un'analisi statistica multivariata: anche quando è presente una batteria di diverse scale, infatti, le stime dei parametri dei modelli vengono calcolate focalizzandosi su una singola scala per volta. Questo, per esempio, non consente di tenere conto del comportamento di risposta che, nel complesso, il rispondente manifesta nei confronti delle diverse scale. Infatti, a differenza di quanto avviene per altri metodi statistici di analisi delle scale ordinali, le stime dei parametri ottenute per la singola scala non variano a seconda che l'analisi venga effettuata su una sola scala o fornendo in input l'intera batteria di scale. Inoltre, sia il modello CUM, sia il CUB, forniscono risultati relativi al *feeling* e all'incertezza che, nel complesso, sulla base di tutte le risposte osservate, caratterizzano una certa scala; non è però possibile ottenere alcuna informazione in merito al singolo rispondente. Ciò che, invece, almeno il modello CUB permette di ottenere sono delle informazioni riferite ai singoli gruppi di rispondenti, individuati grazie all'impiego delle *covariate*.

Nonostante i possibili limiti appena evidenziati dei modelli CUB e CUM, essi risultano particolarmente utili perché – grazie alla rappresentazione del processo di risposta a una scala ordinale attraverso un modello matematico – consentono di isolare la componente di incertezza dal *feeling* vero e proprio che i rispondenti manifestano rispetto all'aspetto che viene chiesto loro di valutare. Inoltre, il modello CUM consente di ottenere informazioni molto analitiche rispetto al *feeling* manifestato dai rispondenti a una scala a differenziale semantico, grazie alla presenza di tre valori stimati, relativi al *feeling* verso il termine posto sul polo destro della scala, verso quello posizionato sull'estremo sinistro, o verso l'alternativa di risposta centrale, che indica neutralità tra i due termini di significato opposto. Oltre che per le scale a differenziale semantico, questo modello può essere impiegato anche per l'analisi delle altre scale ordinali che presentano un numero dispari di categorie, di cui quella centrale esprime neutralità. Anche

in questi casi, infatti, si può ritenere che, quando ci si trova a scegliere la risposta da fornire, si inizi a ragionare dall'alternativa di risposta centrale, per poi decidere se – e in che misura – spostarsi verso destra o verso sinistra, oppure se rimanere fermi alla categoria centrale, per esprimere una valutazione neutrale.

## APPENDICE 1

### PERCEZIONI SENSORIALI NELLE TRE SALE E PERCEZIONE MEDIA

Nel corso del Capitolo 4, sono state considerate come “percezioni medie” le sensazioni tattili, olfattive, gustative e visive emerse dall’analisi – effettuata mediante il modello CUM – di tutte le 1024 risposte al questionario di analisi sensoriale, raccolte nelle tre sale (azzurra, rossa e verde) della Pinacoteca Tosio-Martinengo di Brescia.

Per considerare le stime ottenute nel caso dei 1024 rispondenti come una sintesi media dei risultati delle tre sale, è opportuno verificare che tali stime assumano dei valori intermedi rispetto alle stime dei parametri che si ottengono, sulla base del modello CUM, analizzando separatamente le 337 risposte raccolte nella sala azzurra, le 334 risposte della sala rossa e le 353 risposte raccolte nella sala verde.

VALORI STIMATI DI $\hat{\pi}$	1024 risposte	Sala azzurra	Sala rossa	Sala verde	Media sale
Ruvido-Morbido	0,5153	0,6996	0,5604	0,3275	0,5292
Spigoloso-Tondeggiante	0,3571	0,5724	0,3066	0,1886	0,3558
Appiccicoso-Fluido	0,6653	0,7979	0,5784	0,6304	0,6689
Soffocante-Fresco	0,5449	0,8435	0,3062	0,5251	0,5583
Antico-Nuovo	0,1593	0,1097	0,3182	0,3612	0,2630
Fetido-Aromatico	0,8516	0,9338	0,8259	0,7982	0,8526
Amaro-Dolce	0,3453	0,7527	0,2866	0,2679	0,4357
Speziato-Fruittato	<u>0,1011</u>	0,3862	<u>0,1919</u>	0,2675	0,2819
Insipido-Saporito	0,6802	0,7507	0,7375	0,5631	0,6837
Glaciale-tropicale	<u>0,2447</u>	0,3763	0,4393	<u>0,2896</u>	0,3684
Pallido-Frizzante	0,3015	0,4166	0,3846	0,1357	0,3123
Offuscato-Limpido	0,3924	0,7369	0,3869	0,1475	0,4238

VALORI STIMATI DI $\hat{\xi}_D$	1024 risposte	Sala azzurra	Sala rossa	Sala verde	Media sale
Ruvido-Morbido	0,0218	0,0540	0,0224	0,0000	0,0255
Spigoloso-Tondeggiante	0,0741	0,0795	0,0856	0,0025	0,0559
Appiccicoso-Fluido	0,0954	0,0875	0,0687	0,1303	0,0955
Soffocante-Fresco	0,0903	0,0830	0,0717	0,1251	0,0933
Antico-Nuovo	<u>0,7554</u>	0,0627	0,6649	<u>0,7120</u>	0,4799
Fetido-Aromatico	0,1259	0,1120	0,1246	0,1386	0,1250
Amaro-Dolce	0,2078	0,1560	0,2094	0,4450	0,2701
Speziato-Fruittato	0,3244	0,1915	0,3901	0,6976	0,4264
Insipido-Saporito	0,1226	0,1407	0,1149	0,1078	0,1211
Glaciale-tropicale	0,0442	0,5878	0,0071	0,1002	0,2317
Pallido-Frizzante	0,1152	0,0775	0,1345	0,2147	0,1422
Offuscato-Limpido	0,0177	0,0331	0,0474	0,0000	0,0268

VALORI STIMATI DI $\widehat{\xi}_U$	1024 risposte	Sala azzurra	Sala rossa	Sala verde	Media sale
Ruvido-Morbido	0,7771	0,8014	0,7713	0,7438	0,7721
Spigoloso-Tondeggiante	0,7664	0,7664	0,8146	0,6969	0,7593
Appiccicoso-Fluido	0,7240	0,7564	0,7557	0,6492	0,7204
Soffocante-Fresco	0,7619	0,7938	0,8297	0,6442	0,7559
<u>Antico-Nuovo</u>	<u>0,0337</u>	0,8550	0,1124	<u>0,0485</u>	0,3386
Fetido-Aromatico	0,6061	0,6448	0,5806	0,5852	0,6035
Amaro-Dolce	0,5544	0,6568	0,3703	0,2919	0,4396
Speziato-Fruittato	0,2639	0,5685	0,2745	0,0300	0,2910
Insipido-Saporito	0,6482	0,6249	0,6715	0,6457	0,6473
<u>Glaciale-tropicale</u>	<u>0,1343</u>	0,1837	<u>0,1466</u>	0,2270	0,1858
Pallido-Frizzante	0,6762	0,7225	0,6157	0,6653	0,6678
<u>Offuscato-Limpido</u>	<u>0,8458</u>	0,8421	<u>0,8072</u>	0,7982	0,8158

Dalle stime dei tre parametri del modello CUM ( $\widehat{\pi}$ ,  $\widehat{\xi}_D$  e  $\widehat{\xi}_U$ ) sopra riportate, è possibile notare che, per la maggior parte delle scale a differenziale semantico, i risultati ottenuti dall'analisi di tutte le 1024 risposte risultano intermedi tra il valore massimo e il valore minimo rilevati nelle tre sale; inoltre, le stime relative al caso dei 1024 rispondenti risultano simili alla media dei valori stimati per le tre sale. In particolare, quanto appena affermato si verifica per le otto scale individuate dalle coppie di aggettivi “Ruvido-Morbido”, “Spigoloso-Tondeggiante”, “Appiccicoso-Fluido”, “Soffocante-Fresco”, “Fetido-Aromatico”, “Amaro-Dolce”, “Insipido-Saporito” e “Pallido-Frizzante”.

È quindi opportuno soffermarsi sulle restanti quattro scale a differenziale semantico, cioè “Speziato-Fruittato”, “Offuscato-Limpido”, “Glaciale-Tropicale” e “Antico-Nuovo”.

Relativamente alla scala “Speziato-Fruittato”, si rileva che, analizzando tutte le 1024 risposte, il parametro  $\widehat{\pi}$  risulta leggermente inferiore al valore minimo riscontrato nelle tre sale (che si osserva nella sala rossa). Ciò significa che l'incertezza risulta più elevata di quella che caratterizza le singole stanze; questo è spiegato dal fatto che, nelle tre sale, si rilevano delle percezioni piuttosto diverse tra loro, manifestate dai visitatori scegliendo, sulla scala in questione, delle alternative di risposta diverse. Di conseguenza, analizzando le percezioni di tutti i 1024 rispondenti, le risposte tendono a distribuirsi tra tutte le categorie della scala, portando a un valore maggiore del parametro di incertezza  $1 - \widehat{\pi}$ ; questo spiega perché il valore di  $\widehat{\pi}$  è inferiore al valore minimo rilevato nelle tre sale.

Per quanto invece riguarda “Offuscato-Limpido”, analizzando tutte le 1024 risposte il valore stimato  $\widehat{\xi}_U$  risulta leggermente superiore al valore massimo riscontrato nelle tre sale (che, nello

specifico, si rileva per sala rossa), anche se tale valore risulta molto vicino alla media delle stime di  $\widehat{\xi}_U$  ottenute nelle tre sale. In realtà, i risultati relativi alla componente di *feeling* nel caso dei 1024 rispondenti sono quasi sovrapponibili a quelli che si osservano nella sala azzurra. Infatti, osservando ad esempio il grafico riportato nella Figura 4.17. del Capitolo 4, si può vedere che il punto nero, che rappresenta la percezione media, è praticamente sovrapposto a quello che si riferisce alla sala azzurra. Inoltre, anche i risultati ottenuti nella sala rossa e in quella verde si discostano molto poco, sia da quelli rilevati nella stanza azzurra, sia da quelli ottenuti dall'analisi di tutte le 1024 risposte. Si può quindi ritenere che questi risultati rappresentino adeguatamente la percezione che mediamente si rileva tra i visitatori delle tre sale rispetto alla scala "Offuscato-Limpido".

Riguardo alla scala "Glaciale-Tropicale", il valore stimato di  $\widehat{\xi}_U$  risulta leggermente inferiore al valore minimo che si riscontra nelle tre sale (osservato, in particolare, nella sala rossa). Allo stesso tempo, la stima di  $\widehat{\pi}$  risulta di poco inferiore al valore minimo delle tre stanze (che si rileva nella sala verde); di conseguenza, analizzando tutte le 1024 risposte, l'incertezza risulterà più elevata, in quanto le risposte tendono a distribuirsi tra tutte le categorie della scala, visto che, nelle tre sale, esse ricadono su alternative di risposta diverse. Osservando il grafico riportato nella Figura 4.17. del Capitolo 4, però, è possibile vedere che il punto corrispondente al caso dei 1024 rispondenti risulta molto vicino a quello relativo alla sala rossa, la quale rappresenta una situazione intermedia tra il *feeling* verso la parte sinistra della scala che si osserva nella sala azzurra e il *feeling* prevalentemente neutrale della sala verde. Di conseguenza, anche i risultati dell'analisi di tutte le 1024 risposte alla scala "Glaciale-Tropicale" possono ritenersi una sintesi della percezione media dei visitatori delle tre sale.

Infine, relativamente alla scala "Antico-Nuovo", nel caso dei 1024 rispondenti, il valore stimato di  $\widehat{\xi}_D$  risulta leggermente superiore al valore massimo che si riscontra nelle tre sale (che, in particolare, caratterizza la sala verde), mentre la stima di  $\widehat{\xi}_U$  risulta leggermente inferiore al valore minimo delle tre stanze (che si osserva sempre nella sala verde). Inoltre, i risultati dell'analisi delle 1024 risposte, relativamente alla componente di *feeling*, risultano molto distanti dalla media delle tre stime ottenute nelle tre sale della Pinacoteca. Questo può essere spiegato dal fatto che il *feeling* prevalente nella sala azzurra, vista l'elevata incertezza che la caratterizza, determina la scelta di un numero tutto sommato limitato di visitatori. Di

conseguenza, quando si considerano tutti i 1024 rispondenti, le stime dei parametri di *feeling* non vengono influenzate significativamente dal fatto che nella sala azzurra si osserva una leggera preferenza verso le alternative di risposta posizionate nella parte destra della scala. La percezione media che si ottiene, quindi, riflette maggiormente i risultati ottenuti, per la componente di *feeling*, nella sala rossa e in quella verde e indica che, tra i 1024 visitatori della Pinacoteca, prevale un *feeling* verso la parte destra della scala “Antico-Nuovo”.

## APPENDICE 2

### CODICE R UTILIZZATO PER APPLICARE IL MODELLO CUM

I risultati presentati in questo elaborato, relativamente all'indagine sensoriale svolta presso la Pinacoteca Tosio-Martinengo di Brescia, sono stati ottenuti attraverso lo *Script R* di seguito riportato. Esso, per applicare il modello CUM, richiede alcune funzioni che – per il caso delle scale a differenziale semantico con 7 alternative di risposta – sono contenute nel file “CUM7.R”. Questo file può essere scaricato dal sito del Big&Open Data Innovation Laboratory dell'Università degli Studi di Brescia, nella sezione dedicata al modello CUM (BODaI-Lab, [bodai.unibs.it/cub/cum/](http://bodai.unibs.it/cub/cum/)).

Lo *Script R* sotto riportato richiede che in input venga fornita la matrice dei dati contenente le risposte osservate. In questo caso essa si trova nel file di testo “d4.txt”, che contiene le risposte dei 1024 visitatori intervistati nelle tre sale della Pinacoteca.

#### #SCRIPT R NECESSARIO PER APPLICARE IL MODELLO CUM:

```
rm(list=ls())
graphics.off()
```

```
#Librerie richieste: maxLik - CUB - ggtern - mc2d - rootSolve - xlsx
library(CUB)
source("CUM7.R")
```

#### #Input da fornire

```
dir <- "C:\\DATI\\CUM"      #directory di lavoro
datafile <- "d4.txt"       #nome del file contenente i dati da analizzare

no <- 12                   #numero di scale da analizzare
cat <- 7                   #numero di alternative di risposta presenti in ogni scala
missing <- "."            #caratteri con cui sono codificati i missing data
```

#### #Impostazione directory di lavoro e caricamento dati

```
getwd()
setwd(dir)                #imposta la directory di lavoro

dataSD <- read.table(datafile,na.strings=missing, header=TRUE) #carica i dati
nomi <- colnames(dataSD)  #ricava dai dati i nomi delle diverse scale
```

### **#Distribuzioni di frequenze**

```
#distribuzione di frequenze assolute
par(mfrow=c(4,3))
for (i in 1:no) {
  risp <- dataSD[,i]
  graf<-barplot(as.vector(table(risp,useNA='always')),names.arg=c(1:7,"NA"),
  main=nomi[i])
  text(graf,as.vector(table(risp,useNA='always')),as.character(table(risp,
  useNA= 'always'))))
}
dev.copy2pdf(file="Frequenze Assolute.pdf", width=12, height=9, paper=
"special") #salvataggio del grafico

#distribuzione di frequenze relative
par(mfrow=c(4,3))
for (i in 1:no) {
  risp <- dataSD[,i]
  graf <- barplot(as.vector(table(dataSD[,i])/nrow(dataSD)),names.arg=c(1:7),
  main=nomi[i])
  text(graf,as.vector(table(dataSD[,i])/nrow(dataSD)),as.character(round(table
  (dataSD[,i])/nrow(dataSD),4)))
}
dev.copy2pdf(file="Frequenze Relative.pdf", width=12, height=9, paper=
"special") #salvataggio del grafico
```

### **#Applicazione del Modello CUB**

```
#inizializzazione matrici e vettori necessari
pai <- array(NA,no)
csi <- array(NA,no)
stder <-matrix(NA,no,2)
probCUB <- matrix(NA,no,cat)
dis <- matrix(NA,no,2)
BIC.CS <- matrix(NA,no,2)
AIC <- matrix(NA,no,2)
names(dataSD)
graphics.off()

#applicazione iterativa a tutte le scale da analizzare
for (i in 1:no) {
  risp <- (dataSD[,i]) #indica quale scala analizzare
  cub.i <- GEM(Formula(risp~0|0|0),family="cub",m=cat, data=dataSD) #applica il CUB
  pai[i] <- cub.i$estimates[1]
  csi[i] <- cub.i$estimates[2]
  vc <- diag(vcov(cub.i))
  stder[i,] <- sqrt(vc) #calcolo degli standard error
  pr.cub <- fitted(cub.i)
  probCUB[i,] <- pr.cub
  fr.cub <- tabulate(risp,nbins=cat)/length(risp)
  dis[i,1] <- dissim(fr.cub, pr.cub) #calcolo indice di dissimilarità
  BIC.CS[i,1] <- cub.i$BIC #calcolo information criteria BIC
  AIC[i,1] <- -2*(cub.i$loglik)+2*2 #calcolo information criteria AIC
} #fine del for
```

```

#salvataggio grafici per confronto frequenze osservate e probabilità stimate
myPDFPath = dir
pdf(file="Frequenze e Probabilità CUB.pdf", onefile = TRUE, width=10,
height=15, paper="special")
par(mfrow=c(4,3))
for (i in 1:no) {
  risp <- (dataSD[,i])
  prCB <- probCUB[i,]
  OFplot(risp,prCB,name=paste(nomi[i],"      CUB"),m=cat)
}
dev.off()

#output stime dei parametri
nomicolonne <-c("PI", "CSI")
matrparametri <- matrix(c(pai,csi), ncol=2, dimnames=list(nomi,nomicolonne))
matrparametri
write.table(matrparametri, "ParametriCUB.txt")

#salvataggio rappresentazione delle stime dei parametri
plot(1-pai, 1-csi, xlab=expression(1-pi), ylab=expression(1-xi),
      xlim=c(0,1), ylim=c(0,1), type='n', main='CUB model')
text(1-pai, 1-csi+0.02,nomi)
points(1-pai, 1-csi)
dev.copy2pdf(file="RappresParamCUB.pdf",width=7,height=7,paper="special")

#Applicazione del Modello CUM
#inizializzazione matrici necessarie
param <- matrix(NA,no,3)
logl <- matrix(NA,no,1)
stderrs <- matrix(NA,no,4)
graphics.off()

#applicazione iterativa a tutte le scale da analizzare
for (i in 1:no) {
  source("CUM7.R") #richiama il codice con algoritmo EM
  risp <- (dataSD[,i]) #indica quale scala analizzare
  #non interrompe il ciclo for in caso di errori
  tryCatch(cum.i <- EM7(R=risp,plot=T),
  error=function(e){
  message(paste("Errore item numero ", i, " ",nomi[i]),e)
  }
  )
  param[i,] <- c(cum.i$pai,cum.i$xiD,cum.i$xiU)
  stderrs[i,]<- cum.i$sd #calcolo degli standard error
  logl[i,] <- loglik(param[i,],data=risp)
  dis[i,2] <- cum.i$Diss.index #calcolo indice di dissimilarità
  BIC.CS[i,2] <- cum.i$BIC #calcolo information criteria BIC
  AIC[i,2] <- cum.i$AIC #calcolo information criteria AIC
} #fine del for

#applicazione algoritmo NR (se necessaria in caso di problemi con EM)
#in questo caso viene utilizzato per la scala Glaciale-Tropicale, la numero 10
i<-10 #indicare il numero della scala da analizzare

```

```

risp <- (dataSD[,i])
est.i <- maxLik(loglik,start=c(0.1,0.01,0.01),data=risp) #indicare i valori iniziali
param[i,] <- c(est.i$estimate[1],est.i$estimate[2],est.i$estimate[3])
logl[i,] <- loglik(param[10,],data=risp)
varcovar <- vcov(est.i)
sderr4 <- sqrt(varcovar[2,2]+varcovar[3,3]+2*varcovar[2,3])
stderrs[i,]<- c(sqrt(varcovar[1,1]),sqrt(varcovar[2,2]),sqrt(varcovar[3,3]),
sderr4) #calcolo degli standard error
source("CUM7.R")
dis[i,2] <- dissCUM(risp,param[i,]) #calcolo indice di dissimilarità
BIC.CS[i,2] <- 3*log(length(risp)) - 2*logl[i,] #calcolo BIC
AIC[i,2] <- 6-2*logl[10,] #calcolo AIC

#salvataggio grafici per confronto frequenze osservate e probabilità stimate
pdf(file="Frequenze e Probabilità CUM.pdf", width=10, height=15,
paper="special")
par(mfrow=c(4,3))
for (i in 1:no) {
risp <- (dataSD[,i])
CUMplot(rp=risp,paramp=param[i,],nome=paste(nomi[i]," "))
}
dev.off()
graphics.off()

#output stime dei parametri
colnames(param) <-c("PI", "CSI_down", "CSI_up")
param
write.table(param, "ParametriCUM.txt")

#salvataggio dei singoli ternary plot relativi a ogni scala
for (i in 1:no) {
tern <- triCUMplot(param=param[i,], nmod=1)
tern1 <- tern+
ggtitle(nomi[i])
print(tern1)
dev.copy2pdf(file=paste0("Ternary",i,nomi[i],".pdf"), onefile=FALSE, width=7,
height=7, paper="special")
}

#salvataggio del ternary plot relativo a tutte le scale analizzate
source("CUM7.R")
pdf(file="Ternary00COMPLESSIVO.pdf",width=10,height=10,paper="special")
triCUMplot(param=param, nmod=no)
dev.off()

#Salvataggio dei risultati ottenuti su dei file Excel
vettorell <- logl[,1]
paramll <- matrix(NA,no,4)
paramll <- cbind(param,vettorell)
rownames(paramll) <- nomi
colnames(paramll) <-c("PI", "CSI_down", "CSI_up", "LogLik")
rownames(stder) <- nomi

```

```

colnames(stder) <-c("StdErrPI_cub", "StdErrCSI_cub")
rownames(stderrs) <- nomi
colnames(stderrs) <-c("StdErrPI", "StdErrCSI_down", "StdErrCSI_up", "StdErr1-
CSI_d-CSI_u")
rownames(dis) <- nomi
colnames(dis) <-c("DissCUB","DissCUM")
rownames(BIC.CS) <- nomi
colnames(BIC.CS) <-c("BIC CUB", "BIC CUM")

library("xlsx")
write.xlsx(paramll, file="ParametriCUM.xlsx", sheetName = "CUM",
  col.names = TRUE, row.names = TRUE, append = FALSE)
write.xlsx(stderrs, file="ParametriCUM.xlsx", sheetName = "CUMstdErr",
  col.names = TRUE, row.names = TRUE, append = TRUE)
write.xlsx(matrparametri, file="ParametriCUM.xlsx", sheetName = "CUB",
  col.names = TRUE, row.names = TRUE, append = TRUE)
write.xlsx(stder, file="ParametriCUM.xlsx", sheetName = "CUBstdErr",
  col.names = TRUE, row.names = TRUE, append = TRUE)

library("xlsx")
write.xlsx(dis, file="DissimBIC.xlsx", sheetName = "Dissim",
  col.names = TRUE, row.names = TRUE, append = FALSE)
write.xlsx(BIC.CS, file="DissimBIC.xlsx", sheetName = "BIC",
  col.names = TRUE, row.names = TRUE, append = TRUE)

```

Il codice appena riportato richiede che il file dato come input contenga esclusivamente la parte della matrice dei dati relativa alle scale a differenziale semantico che si vogliono analizzare mediante il modello CUM. Per esempio, nel caso dell'indagine sensoriale svolta presso la Pinacoteca, il file "d4.txt" è organizzato in 12 colonne, che contengono le 1024 risposte a ciascuna delle 12 scale su cui si desidera applicare il modello CUM.

Quando in input viene invece fornita la matrice dei dati contenente anche delle risposte diverse dalle scale da analizzare con il modello CUM, è necessario apportare le seguenti modifiche alla parte iniziale dello *Script* sopra riportato.

```

#Input da fornire
dir <- "C:\\DATI\\CUM"      #directory di lavoro
datafile <- "d4.txt"       #nome del file contenente i dati da analizzare

colonnainizio <- 3 # colonna in cui si trova la prima variabile da analizzare
colonnafine <- 14 # colonna in cui si trova l'ultima variabile da analizzare
no <- colonnainizio-colonnafine+1 #calcolo del numero di item da analizzare

cat <- 7                   #numero di alternative di risposta presenti nelle scale
missing <- "."             #caratteri con cui sono codificati i missing data

```

```
#Impostazione directory di lavoro e caricamento dati
getwd()
setwd(dir)      #imposta la directory di lavoro

dataset <- read.table(datafile,na.strings=missing, header=TRUE) #carica i dati
dataSD <- dataset[:,colonnainizio:colonnafine] #estrae la parte del dataset
nella quale sono contenute le scale a differenziale semantico da analizzare

nomi <- colnames(dataSD) #ricava dai dati i nomi delle diverse scale
```

Anziché indicare il numero di scale contenute nel file di input, infatti, dovrà essere indicato quali sono le colonne del *dataset* da analizzare attraverso il modello CUM, inserendo il numero della prima e dell'ultima colonna che contengono le risposte alle scale a differenziale semantico.

*Palo Vercelli*

## BIBLIOGRAFIA

- Abbu, H. R., Gopalakrishna, P. (2017), Synergistic effects of market orientation implementation and internalization on firm performance: Direct service provider industry, *Journal of Business Research*, 125, 851-863.
- Agresti, A. (2010), *Analysis of Ordinal Categorical Data*, seconda edizione, John Wiley & Sons, Hoboken, USA.
- Agresti, A. (2013), *Categorical Data Analysis*, terza edizione, Wiley Interscience, John Wiley & Sons, Hoboken, USA.
- Akaike, H. (1974), A New Look at the Statistical Model Identification, *IEEE Transactions of Automatic Control*, 19, 716-723.
- Altinsoy, M. E., Jeckosch, U. (2012), The semantic space of vehicle sounds: developing a semantic differential with regard to customer perception, *Journal of the Audio Engineering Society*, 60 (1-2), 13-20.
- Anderson, A. B. (1970), Structure of semantic space, *Sociological Methodology*, 2, 308-325.
- Aslam, M. M. (2005), Are you selling the right colour? A cross-cultural review of colour as a marketing cue, in *10<sup>th</sup> International Conference on Corporate and Marketing Communication*, Cipro, 8-9 aprile 2005.
- Barnes, C., Southee, C., Henson, B. (2003), The impact of affective design of product packaging upon consumer purchase decisions, in *Proceedings of the 2003 International Conference on Designing pleasurable products and interfaces*, 23-25 giugno 2003, Pittsburg, USA.
- Bartholomew, D., Knott, M., Moustaki, I., *Latent Variable Models and Factor Analysis. A Unified Approach*, terza edizione, John Wiley & Sons, Hoboken, USA.
- Bentler, P. M. (1969), Semantic space is (approximately) bipolar, *The Journal of Psychology*, 71, 33-40.
- Bertoli, G., Valdani, E. (2018), *Marketing internazionale*, seconda edizione, Egea, Milano.
- Bini, M., Monari, P., Piccolo, D., Salmaso, L. (2009), *Statistical Methods for the Evaluation of Educational Services and Quality of Products*, prima edizione, Physica-Verlag, Springer-Verlag, Berlino, Germania.
- Bishop, P. A., Herron, R. L. (2015), Use and Misuse of the Likert Item Responses and Other Ordinal Measures, *International Journal of Exercise Science*, 8 (3), 297-302.
- Bose, S., Ponnampalasa, A. (2011), Country of origin effect on services: an evaluation of entertainment, *Managing Leisure*, 16, 98-107.

Brace, I. (2008), *Questionnaire design. How to plan, structure and write survey material for effective marketing research*, seconda edizione, Kogan Page Publishers, Londra, UK.

Busacca, B., Bertoli, G. (2017), *Customer value. Soddisfazione, fedeltà, valore*, terza edizione, Egea, Milano.

Capecchi, S., Ghiselli, S. (2015), Modelling Job Satisfaction of Italian Graduates, in Carpita, M., Brentari, E., Qannari, E. M., *Advances in Latent Variables*, Springer International Publishing, Cham, Svizzera.

Casella, G, Berger, R. L. (2002), *Statistical Inference*, seconda edizione, Duxbury, Thomas Learning, Pacific Grove, USA.

Cavicchi, A., Simeone, M. R., Santini, C., Bailetti, L. (2016), Market research and sensory analysis: a reasoned review and agenda of their contribution to market orientation in the food industry, in Lindgreen, A. et al., *Market orientation. Transforming food and agribusiness around the customer*, seconda edizione, Routledge, Taylor & Francis Group, Londra, UK.

Cicchitelli, G., D'Urso, P., Minozzo, M. (2017), *Statistica: principi e metodi*, terza edizione, Pearson, Milano.

Cicia, G., Corduas, M., Del Giudice, T., Piccolo, D. (2008), L'analisi delle preferenze dei consumatori nei confronti delle produzioni di qualità: uno studio del consumo di caffè equosolidale mediante il modello CUB, *SIDEA Meeting*, Portici, 25-27 settembre 2008.

Corduas, M., Iannario, M., Piccolo, D. (2009), A class of statistical models for evaluating services and performances, in Bini, M. et al., *Statistical Methods for the Evaluation of Educational Services and Quality of Products*, Physica-Verlag, Springer-Verlag, Berlino, Germania.

Corduas, M. (2014), Modelling Correlated Consumer Preferences, in Carpita, M., Brentari, E., Qannari, E. M., *Advances in Latent Variables*, Springer International Publishing, Cham, Svizzera.

Coxhead, P., Bynner, J. M. (1981), Factor analysis of semantic differential data, *Quality and Quantity*, 15, 553-567.

Cytowic, R. E. (2002), *Synesthesia: A Union of the Senses*, seconda edizione, Bradford Books, MIT Press Business, Cambridge, Massachusetts, USA.

Clevenger, T., Lazier, G. A., M. L. Clark (1965), Measurement of corporate images by semantic differential, *Journal of Marketing Research*, 2 (1), 80-82.

Crespi, I. (1961), Use of a scaling technique in surveys, *Journal of Marketing*, 25 (5), 69-72.

- Crowley, A. E. (1993), The two-dimensional impact of colour on shopping, *Marketing Letters*, 4 (1), 59-69.
- Dalton, P., Maute, C., Oshida, A., Hikichi, S., Izumi, Y. (2008), The use of semantic differential scaling to define the multi-dimensional representation of odors, *Journal of Sensory Studies*, 23 (4), 485-497.
- D'Elia, A. (2000), Il meccanismo dei confronti appaiati nella modellistica per graduatorie: sviluppi statistici ed aspetti critici, *Quaderni di Statistica*, 2, 173-203.
- D'Elia, A. (2003), A mixture model with covariates for ranks data: some inferential developments, *Quaderni di Statistica*, 5, 1-25.
- D'Elia, A., Piccolo, D. (2005), A mixture model for preferences data analysis, *Computational Statistics & Data Analysis*, 49, 917-934.
- Dempster, A. P., Laird, N. M., Rubin, D. B. (1977), Maximum Likelihood from incomplete Data via the EM Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 39 (1), 1-38.
- Dickson, J., Albaum, G. (1977), A method for developing tailormade semantic differentials for specific marketing content areas, *Journal of Marketing Research*, 14 (1), 87-91.
- Drake, M. A., Clark, S., Costello, M., Bodyfelt, F. (2009), *The Sensory Evaluation of Dairy Products*, seconda edizione, Springer Science, New York, USA.
- Friedmann, R. (1986), Psychological meaning of products: Identification and marketing applications, *Psychology & Marketing*, 3 (1), 1-15.
- Fry, J. N., Claxton, J. D. (1971), Semantic differential and nonmetric Multidimensional Scaling description of brand images, *Journal of Marketing Research*, 8 (2), 238-240.
- García I., Gibaja J. J., Mujika A. (2003), A study on the effect of cause-related marketing on the attitude towards the brand: The case of Pepsi in Spain, *Journal of Nonprofit & Public Sector Marketing*, 11 (1), 111-135.
- Garland, R. (1990), A comparison of the three forms of the semantic differential, *Marketing Bulletin*, 1, 19-24.
- Gottard, A., Iannario, M., Piccolo, D. (2016), Varying uncertainty in CUB models, *Advanced in Data Analysis and Classification*, 10 (2), 225-244.
- Grewal, D., Levy, M. (2019), *M:Marketing*, sesta edizione, McGraw-Hill Education, New York, USA.

- Hague, P. (2021). *Market research in practice: an introduction to gaining greater market insight*, quarta edizione, Kogan Page Publishers, Londra, UK.
- Heaps, R. A. (1972), Use of the semantic differential technique in research: Some precautions, *The Journal of Psychology*, 80 (1), 121-125.
- Henson, B, Choo, D., Barnes, C., Childs, T. (2006), A semantic differential study of combined visual and tactile stimuli for packaging design, in *Proceedings of the International Conference on Contemporary Ergonomics*, Cambridge, UK, 4-6 aprile 2006.
- Hoffman, K. D., Bateson, J. E. G., Iasevoli, G. (2007), *Marketing dei servizi*, prima edizione, Apogeo Education, Maggioli Editore, Santarcangelo di Romagna.
- Hogg, J. (1969), A Principal Components Analysis of Semantic Differential Judgements of Single Colors and Color Pairs, *The Journal of General Psychology*, 80 (1), 129-140.
- Hogg, R. V., McKean, J. W., Craig, A. T. (2019), *Introduction to Mathematical Statistics*, ottava edizione, Pearson, New York, USA.
- Howes, D. (2014), Introduction to Sensory Museology, *The Senses and Society*, 9 (3), 259-267.
- Huang, Y., Chen, C., Khoo, L. P. (2012), Products classification in emotional design using a basic-emotion based semantic differential method, *International Journal of Industrial Ergonomics*, 42, 569-580.
- Hultén, B., Broweus, N., van Dijk, M. (2009), *Sensory Marketing*, prima edizione, Palgrave Macmillan, Londra, UK.
- James, G., Witten, D., Hastie, T., Tibshirani, R. (2021), *An Introduction to Statistical Learning with applications in R*, seconda edizione, Springer, New York, USA.
- Iannario, M. (2007), A statistical approach for modelling Urban Audit Perception Surveys, *Quaderni di Statistica*, 9, 149-172.
- Iannario, M. (2009), Fitting measures for ordinal data models, *Quaderni di Statistica*, 11, 39-72.
- Iannario, M., Manisera, M., Piccolo, D., Zuccolotto, P. (2012), Sensory analysis in the food industry as a tool for marketing decisions, *Advanced in Data Analysis and Classification*, 6 (4), 303-321.
- Iannario, M., Piccolo, D. (2010a), A New Statistical Model for the Analysis of Customer Satisfaction, *Quality Technology & Quantitative Management*, 7 (2), 149-168.
- Iannario, M., Piccolo, D. (2010b), Statistical modelling of subjective survival probability, *GENUS*, LXVI (2), 17-42.

- Iannario, M., Piccolo, D. (2011), University Teaching and Students' Perception: Models of the Evaluation Process, in Attanasio, M., Capursi, V., *Statistical Methods for the Evaluation of University Systems*, Springer-Verlag, Berlino, Germania.
- Iannario, M, Piccolo, D. (2012), CUB models: Statistical methods and empirical evidence, in Kennett R.S., Salini, S., *Modern Analysis of Customer Surveys: with applications using R*, quinta edizione, John Wiley & Sons, Chichester, UK.
- Iannario, M., Piccolo, D. (2016a), A generalized framework for modelling ordinal data, *Statistical Methods & Applications*, 25, 163-189.
- Iannario, M., Piccolo, D. (2016b), A comprehensive framework of regression models for ordinal data, *METRON*, Springer, Università La Sapienza di Roma, 74 (2), 233-252.
- Jaffe, E. D., Nebenzahl, I. D. (1984), Alternative questionnaire formats for country image studies, *Journal of Marketing Research*, 21 (4), 463-461.
- Jamieson, S. (2004), Likert scales: How to (ab)use them, *Medical Education*, 38 (12), 1217-1218.
- Johns, R. (2010), Likert items and scales, *Survey question bank: Methods Fact Sheet 1*, Marzo 2010.
- Johnson, R. A., Wichern, D. W. (2017), *Applied Multivariate Statistical Analysis*, sesta edizione, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA.
- Joshi, A., Kale, S., Chandel, S., Pal, D. K. (2015), Likert scale: explored and explained, *Birtish Journal of Applied Science and Technology*, 7 (4), 396-403.
- Kinra, N. (2006), The effect of country-of-origin on foreign brand names in the Indian market, *Marketing Intelligence & Planning*, 24 (1), 15-30.
- Kissler, J., Assadollahi, R., Herbert, C. (2006), Emotional and semantic networks in visual word processing: insights from ERP studies, in Anders et al., *Progress in Brain Research*, 156, 147-183.
- Konisci, S., Kitagawa, G. (2008), *Information Criteria and Statistical Modeling*, prima edizione, Springer Science, New York, USA.
- Kriyantono, R. (2017), Consumers' internal meaning on complementary co-branding product by using Osgood's theory of semantic differential, *Journal of Management and Marketing Review*, 2 (2), 57-63.
- Kumar, U. D., *Business Analytics. The Science of Data-Driven Decision Making*, prima edizione, John Wiley & Sons India, Nuova Delhi, India.
- Kuzon, W. M., Urbanek, M. G., McCabe, S. (1996), The Seven Deadly Sins of Statistical Analysis, *Annals of Plastic Surgery*, 37 (3), 265-272.

- Lalla, M. (2017), Fundamental characteristics and statistical analysis of ordinal variables: A review, *Quality & Quantity*, 51, 435-458.
- Lambin, J. (2016), *Market-driven management. Marketing strategico e operativo*, settima edizione, McGraw-Hill Education, Milano.
- Lewis, B. R., Mitchell, V. W. (1990), Defining and measuring the quality of customer service, *Marketing Intelligence & Planning*, 8 (6), 11-17.
- Liddle, A. R. (2007), Information criteria for astrophysical model selection, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 377 (1), 74-78.
- Likert, R. (1932), A technique for the measurement of attitudes, *Archives of Psychology*, 22 (140), 5-55.
- Linting, et al. (2007), Nonlinear Principal Components Analysis: Introduction and Application, *Psychological Methods*, 12 (3), 336-358.
- Linting, M., van der Kooij, A (2012), Nonlinear Principal Components Analysis With CATPCA: A Tutorial, *Journal of Personality Assessment*, 94 (1), 12-25.
- Macedo, V., Silva, C. M. (2014), Building a semantic differential scale as tool for assessing UX evaluation with home appliances, in Marcus, A., *Design, User Experience, and Usability. Theories, Methods, and Tools for Designing the User Experience 2014*, 308-317.
- Malhotra, N. K. (2020), *Marketing research. An applied approach*, settima edizione, Pearson Education, Harlow, UK.
- Manisera, M., Zuccolotto, P. (2014a), Modeling “don’t know” responses in rating scale, *Pattern Recognition Letters*, 45, 226-234.
- Manisera, M., Zuccolotto, P. (2014b), Modeling rating data with Nonlinear CUB models, *Computational Statistics and Data Analysis*, 78, 100-118.
- Manisera, M., Zuccolotto, P. (2015), Identifiability of a model for discrete frequency distributions with a multidimensional parameter space, *Journal of Multivariate Analysis*, 140, 302-316.
- Manisera, M., Zuccolotto, P. (2017), Estimation of Nonlinear CUB models via numerical optimization and EM algorithm, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 46 (7), 5723-5739.
- Manisera, M., Zuccolotto, P. (2019), Discussion of “The class of CUB models: statistical foundations, inferential issues and empirical evidence” by Domenico Piccolo and Rosaria Simone, *Statistical Methods & Applications*, 28 (3), 465-470.

- Manisera, M., Zuccolotto, P. (2022), A mixture model for ordinal variables measured on semantic differential scales, *Econometrics and Statistics*, 22, 98-123.
- Mann, I. T., Phillips, J. L., Thompson, E. G. (1979), An examination of methodological issues relevant to the use and interpretation of the semantic differential, *Applied Psychological Measurement*, 3 (2), 213-229.
- Markechová D., Bégerová, M., Fandelová, E., Tirpáková A. (2013), Method of semantic differential in the research from the field of marketing communication, *International Journal of Education and Research*, 1 (5).
- Mazzocchi, M. (2008), *Statistics for Marketing and Consumer Research*, prima edizione, Sage Publications, Londra, UK.
- Menzes, D., Elbert, N. F. (1979), Alternative semantic scaling formats for measuring store image: An evaluation, *Journal of Marketing Research*, 16 (1), 80-87.
- McCulloch, C. E. (1997), Maximum Likelihood Algorithms for Generalized Linear Mixed Models, *Journal of the Statistical Association*, 92 (437), 162-170.
- McDaniel, C., Gates, R. (2015), *Marketing research*, decima edizione, John Wiley & Sons, Hoboken, USA.
- McDonald, M., Dunbar, I. (2012), *Market segmentation. How to do it and how to profit from it*, quarta edizione, John Wiley & Sons, Hoboken, USA.
- Mindak, W. A. (1956), A new technique for measuring advertising effectiveness, *Journal of Marketing*, 20 (4), 367-378.
- Mindak, W. A. (1961), Fitting the semantic differential to the marketing problem, *Journal of Marketing*, 25 (4), 28-33.
- Norman, G. (2010), Likert scales, levels of measurement and the “laws” of statistics, *Advances in Health Science Education*, 15 (5), 265-272.
- Osgood, C. E. (1952), The nature and measurement of meaning, *Psychological Bulletin*, 49 (3), 197-237.
- Osgood, C. E., Suci, G. J., Tannenbaum, P. H. (1957), *The Measurement of Meaning*, prima edizione, University of Illinois Press, Champaign, Illinois, USA.
- Osgood, C. E. (1981), The cognitive dynamics of synesthesia and metaphor, *Review of Research in Visual Arts Education*, 7 (2), 56-80.
- Pensé-Lhéritier, A., Bacle I., Delarue, J. (2021), *Nonfood Sensory Practices*, prima edizione, Woodhead Publishing, Elsilver, Kidlington, UK.

- Piccolo, D. (2003), One the Moments of a Mixture of Uniform and Shifted Binomial random variables, *Quaderni di Statistica*, 3, 85-104.
- Piccolo, D. (2006), Observed information matrix for MUB models, *Quaderni di Statistica*, 8, 33-78.
- Piccolo, D. (2015), Inferential Issues on CUBE Models with Covariates, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 44, 5023-5036.
- Piccolo, D., Simone, R. (2019), The class of CUB models: statistical foundations, inferential issues and empirical evidence, *Statistical Methods & Applications*, 28 (3), 389-435.
- Piccolo, D., Simone, R., Iannario, M. (2019), Cumulative and CUB Models for Rating Data: A Comparative Analysis, *International Statistical Review*, 87 (2), 207-236.
- Qannari, E. M., *Advances in Latent Variables*, Springer International Publishing, Cham, Svizzera.
- Reise, S. P., Waller, N. G., Comrey, A. L. (2000), Factor Analysis and Scale Revision, *Psychological Assessment*, 12 (3), 287-297.
- Rothman, A. I. (1968), The factor analysis of a science-related semantic differential instrument, *Journal of Educational Measurement*, 5 (2), 145-149.
- Russell, G. J. (2010), Itemized rating scales (Likert, semantic differential, and Stapel), in Sheth, J., Malhotra, N. K., *Wiley International Encyclopedia of Marketing*, John Wiley & Sons, Hoboken, USA.
- Sagiv, N., Ward, J. (2006), Cross-modal interactions: lessons from synesthesia, *Progress in Brain Research*, 155, 263-275.
- Samui, P, Tien Bui, D., Chakraborty, S., Deo, R. C. (2020), *Handbook of Probabilistic Models*, prima edizione, Butterworth-Heinemann, Elsevier, Oxford, UK.
- Schmidt, M. J., Hollensen, S. (2006), *Marketing research. An international approach*, prima edizione, Financial Times Prentice Hall, Pearson Education, Harlow, UK.
- Schwarz, G. (1978), Estimating the dimension of a model, *The Annals of Statistics*, 6 (2), 461-464.
- Shifferstein, R. (2010), From salad to bowl: the role of sensory analysis in product experience research, *Food Quality and Preference*, 21 (8), 1059-1067.
- Shah, D., Murthi, B. P. S. (2021), Marketing in a data-driven digital world: Implications for the role and scope of marketing, *Journal of Business Research*, 125, 772-779.

- Stoklasa, J., Talášek, T., Stoklasová, J. (2018), Semantic differential for the twenty-first century: scale relevance and uncertainty entering the semantic space, *Quality & Quantity*, 53 (1), 435-448.
- Stevens, S. S. (1946), On the Theory of Scales of Measurement, *Science*, 103 (2684).
- Stone, H., Bleibaum, R. N., Thomas, H. A. (2012), *Sensory Evaluation Practices*, quarta edizione, Academic Press, Elsevier, Londra, UK.
- Tomaselli, V., Cantone, G. G., D'Agata, R. (2020), Big Data e scale di rating: un modello CUBE per l'analisi delle valutazioni del consumatore, in Gozzo et al., *Big data e processi decisionali: strumenti per l'analisi delle decisioni giuridiche, politiche, economiche e sociali*, prima edizione, EGEA, Milano.
- Tourangeau, R., Rips, L. J., Rasinski, K. (2000), *The Psychology of Survey Response*, prima edizione, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Van Trijp, H. C. M., Schifferstein, H. N. J. (1995), Sensory analysis in marketing practice: comparison and integration, *Journal of Sensory Studies*, 10, 127-147.
- Watanabe, M., Yamaguchi, K. (2014), *The EM Algorithm and Related Statistical Models*, prima edizione, Marcel Dekker, New York, USA.
- Westbrook, R. A., Oliver, R. L. (1981), Developing better measures of customer satisfaction: Some preliminary results, in Monroe, K. B., Abor, A., *Advances in Consumer Research*, 8, 94-99.
- Wiedmann, K., Lebenz, F., Haase, J., Hennings, N. (2018), The power of experiential marketing: exploring the causal relationships among multisensory marketing, brand experience, customer perceived value and brand strength, *Journal of Brand Management*, 25, 101-118.
- Willits, F. K., Theodori, G. L., Luioff, A. E. (2016), Another look at Likert scales, *Journal of Rural Social Sciences*, 31 (3), 126-139.
- Witz, J., Lee, M. C. (2003), An examination of the quality and context-specific applicability of commonly used customer satisfaction measures, *Journal of Service Research*, 5 (4), 345-355.
- Yannou, B., Petiot, J. (2004), Measuring consumer perceptions for a better comprehension, specification and assessment of product semantics, *International Journal of Industrial Ergonomics*, 33 (6), 507-525.
- Yodgangkai, S., Pimapunsri, K. (2011), Application of semantic differential technique and statistical approach to evaluate designer's and customer's perception in furniture design, *Applied Science and Engineering Progress*, 4 (1), 23-30.

## SITOGRAFIA

BODaI-Lab, “Big and Open Data Innovation Laboratory dell’Università degli Studi di Brescia”, <https://bodai.unibs.it/>, ultima consultazione 09/02/2023.

BODaI-Lab (Big and Open Data Innovation Laboratory dell’Università degli Studi di Brescia), “Data Science for Brescia – Arts and Cultural Places”, <https://bodai.unibs.it/ds4bs/>, ultima consultazione 17/01/2023.

BODaI-Lab (Big and Open Data Innovation Laboratory dell’Università degli Studi di Brescia), “CUM Model”, <https://bodai.unibs.it/cub/cum/>, ultima consultazione 12/03/2023.

Gruppo Fallani, “Allestimento museale Pinacoteca Tosio-Martinengo – Comune di Brescia ”, <https://www.gruppo fallani.it/it/portfolio/realizzazioni/brescia-pinacoteca/>, ultima consultazione 9/02/2023.

Pacella, F., “Tecnologia per la cultura. Così la visita è su misura”, *Il Giorno*, 16 dicembre 2021, <https://www.ilgiorno.it/brescia/cronaca/tecnologia-per-la-cultura-cosi-la-visita-e-su-misura-1.7153519>, ultima consultazione 17/01/2023.

Rossi, I., “Musei di domani: con app e big data Brescia diventa laboratorio”, *Giornale di Brescia*, 16 dicembre 2021, <https://www.giornaledibrescia.it/cultura-e-spettacoli/musei-di-domani-con-app-e-big-data-brescia-diventa-laboratorio-1.3651952>, ultima consultazione 17/01/2023.